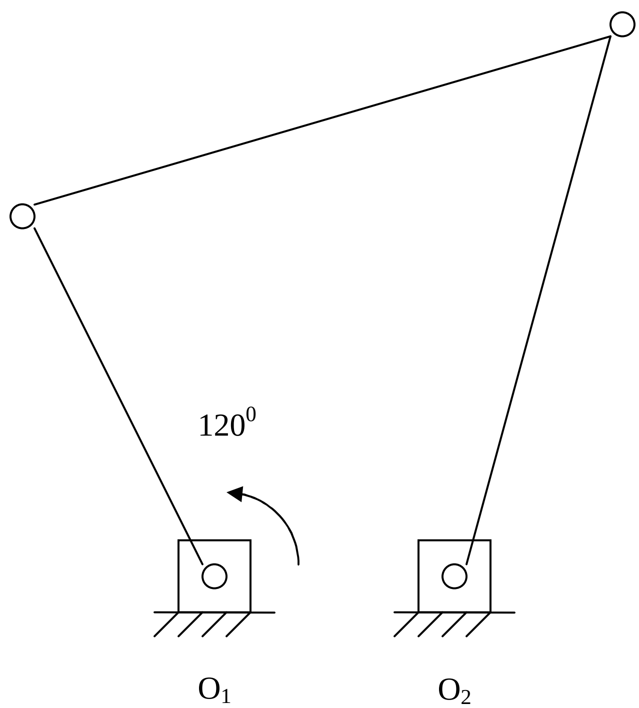
ЛЕКЦИЈА 2. КИНЕМАТИКА НА ЕДНА РОБОТСКА РАКА

На сл.2.1 е прикажан механизам со еден степен слобода на движење. Кога дадена променлива на системот е поставена на одредена вредност, механизмот со еден степен слобода на движење е целосно дефиниран, што значи дека сите негови останати променливи се одредени и познати. Така, ако првиот крак од механизмот на сл.2.1 се постави под агол од 120^0, ќе бидат одредени и аглите на останатите два крака.



Сл.2.1. Приказ на механизам со еден степен слобода на движење

Кај механизмите со повеќе степени слобода на движење секоја влезна променлива треба одделно да се дефинира, за да бидат одредени преостанатите параметри на системот. Бидејќи роботите манипулатори се механизми со повеќе степени слобода на движење, за да се одреди положбата на раката од роботот, потребно е да се познати променливите на сите зглобови.

Роботите манипулатори се три димензионални, отворени и ланчани механизми со повеќе степени слобода на движење. Доколку роботот се движи во просторот, тој претставува тридимензионален механизам. Дводимензионалните роботи со повеќе степени слобода на движење се можни, но не се така вообичаени.

Механизмот од сл.2.1 е затворен систем. Роботите се отворени системи, зошто дури и кога сите променливи на зглобовите се поставени на саканите вредности, не значи дека раката од роботот сигурно ќе биде во сакaната положба и на саканата позиција.

2.3. МАТРИЧНО ПРЕТСТАВУВАЊЕ

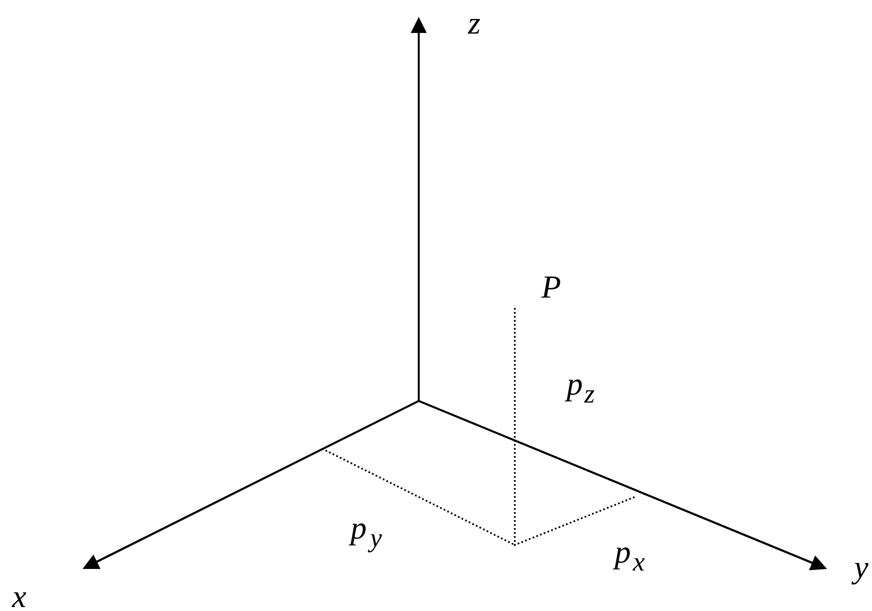
За претставување точки, вектори, координатни системи, транслација, ротација, трансформации, објекти и други кинематички елементи се користат матрици.

2.3.1. ПРЕТСТАВУВАЊЕ ТОЧКА ВО ПРОСТОРОТ

Една точка P во просторот може да се претстави на следниот начин:

(2.1) $P = p_x\vec{i} + p_y\vec{j} + p_z\vec{k}$

каде што p_x, p_y, p_z се координати на точката во одбраниот референтен координатен систем. Положбата на точката во просторот може да се претстави и со помош на други координатни системи.



Сл.2.1. Претставување точка во просторот

2.3.2. ПРЕТСТАВУВАЊЕ ВЕКТОР ВО ПРОСТОРОТ

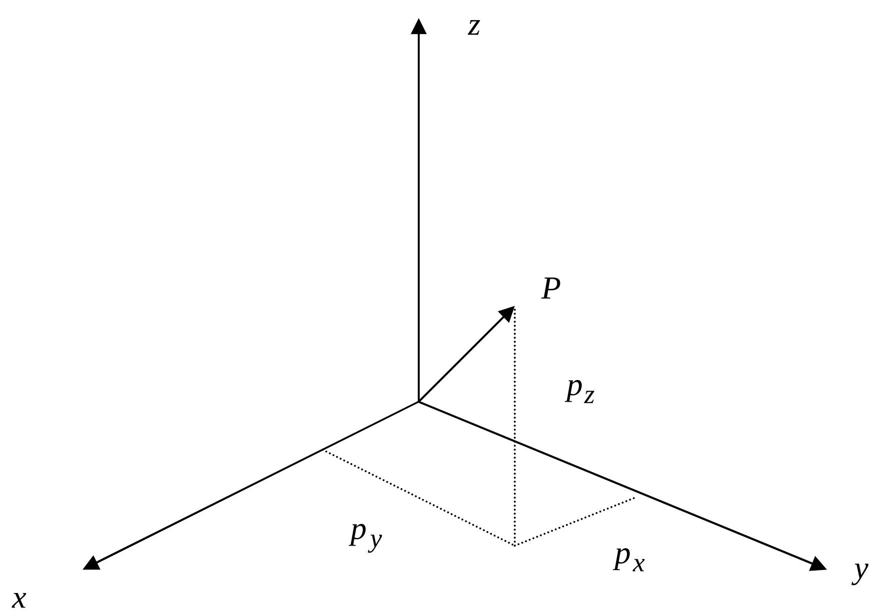
Еден вектор $\vec{P}$ во просторот може да се претстави преку координатите на неговиот почеток и врв. Така, ако векторот $\vec{P}$ започнува во точката $A(A_x, A_y, A_z)$ и завршува во точката $B(B_x, B_y, B_z)$, тој ќе биде претставен на следниот начин:

(2.2) $\vec{P} = (B_x - A_x)\vec{i} + (B_y - A_y)\vec{j} + (B_z - A_z)\vec{k}$

Ако векторот започнува во координатниот почеток, равенката (2.2) добива облик:

(2.3) $\vec{P} = p_x\vec{i} + p_y\vec{j} + p_z\vec{k}$

каде што p_x, p_y, p_z се координати на векторот во одбраниот референтен координатен систем. Равенката (2.3) е идентична со равенката (2.1) затоа што секоја точка во просторот може да се претстави со вектор, чиј почеток се наоѓа во координатниот почеток од одбраниот координатен систем.



Сл.2.2. Претставување вектор во просторот

Трите компоненти на векторот можат да се претставаат во матричен облик на следниот начин:

$$(2.4) \quad \vec{P} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

или, во малку модифициран облик:

$$(2.5) \quad \vec{P} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

кадешто w претставува нормирачки фактор таков што:

$$(2.6) \quad p_x = \frac{x}{w}, p_y = \frac{y}{w}, p_z = \frac{z}{w}$$

Променливата w може да биде произволен број и со неговата измена се менува големината на самиот вектор. Ако w е поголемо од единица, сите компоненти од векторот се намалуваат; ако w е помало од единица, компонентите од векторот се зголемуваат; кога w е еднаков на единица, компонентите од векторот остануваат непроменети. Специјален случај е кога w е еднаков на нула. Тогаш компонентите на векторот стануваат бесконечно големи и претставуваат вектор со бесконена должина, но ист правец. Затоа факторот $w = 0$ се користи за претставување **вектор на правец**.

Пример 2.1. Векторот:

$$(2.7) \quad \vec{P} = 3\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}$$

да се претстави во матричен облик: а) со нормирачки фактор $w = 2$ и б) како единичен вектор на правец.

Решение: а) Соодветната матрица-колона за претставување на векторот (2.7) со нормирачки фактор $w = 2$ е:

$$(2.8) \quad \vec{P} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

б) Соодветната матрица-колона за претставување на векторот (2.7) како вектор на правец е:

$$(2.9)\quad \vec{P} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Меѓутоа, за да биде тој единичен вектор на правец, потребно е неговите компоненти да се нормализираат така што должината на векторот ќе биде единица. За таа цел, координатите на векторот се делат со квадратен корен од збирот на квадратите на трите компоненти:

$$(2.10)\quad \sqrt{3^2 + 5^2 + 2^2} = \sqrt{38} \approx 6.16$$

Тогаш:

$$(2.11)\quad \lambda = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} = 1$$

кадешто:

$$(2.12)\quad p_x = \frac{3}{6.16} = 0.487,\ p_y = \frac{5}{6.16} = 0.811,\ p_z = \frac{2}{6.16} = 0.324$$

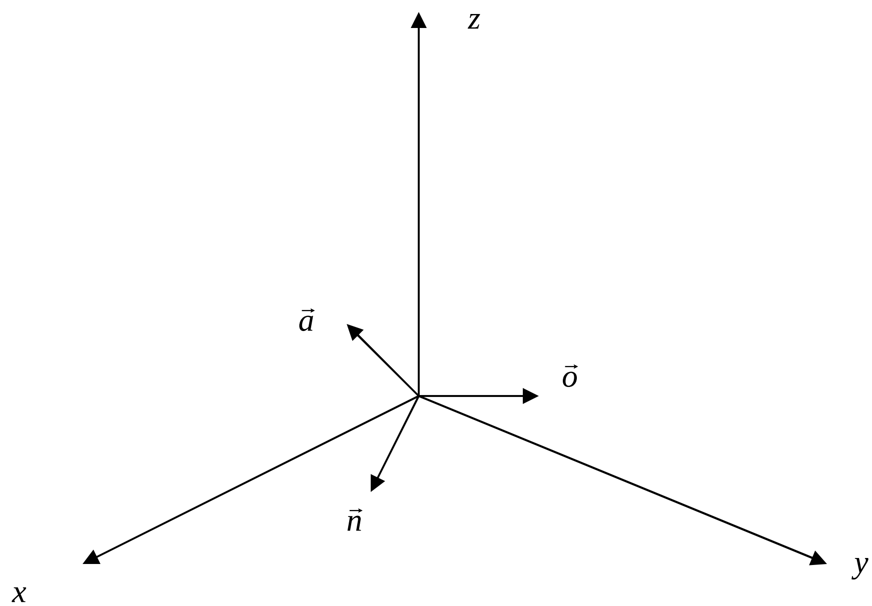
Матрицата-колона за претставување на единичниот вектор на правец е:

$$(2.13)\quad \vec{P}_{edin} = \begin{bmatrix} 0.487 \\ 0.811 \\ 0.324 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.3.3. ПРЕТСТАВУВАЊЕ КООРДИНАТЕН СИСТЕМ ВО ПРОСТОРОТ

Произволен координатен систем во просторот се претставува во однос на одбран референтен координатен систем со помош на три, меѓусебно нормални единични вектори $\vec{n}, \vec{o}, \vec{a}$, како што е покажано на сл.2.3. Секој од единичните вектори $\vec{n}, \vec{o}, \vec{a}$ е претставен со своите три координати во референтниот координатен систем:

$$(2.14)\quad \vec{n} = (n_x, n_y, n_z), \vec{o} = (o_x, o_y, o_z), \vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$$



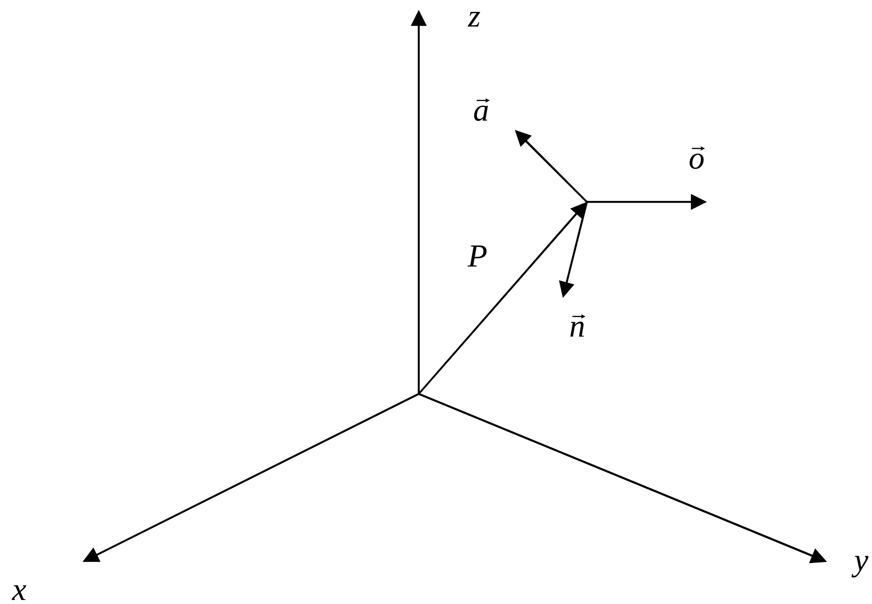
Сл.2.3. Претставување произволен координатен систем во просторот

Следствено, еден произволен координатен систем F може да се претстави со следната матрица:

(2.15) $$\underline{F} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix}$$

Доколку набљудуваниот координатен систем не е сместен во координатниот почеток од референтниот координатен систем, како што е прикажано на сл.2.4, потребно е да се определи и положбата на координатниот почеток од произволниот координатен систем во однос на референтниот координатен систем. За таа цел се црта вектор $\vec{P}$ помеѓу координатните почетоци од двата координатни системи. Тогаш набљудуваниот произволен координатен систем може да се претстави со матрицата:

(2.16) $$\underline{F} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



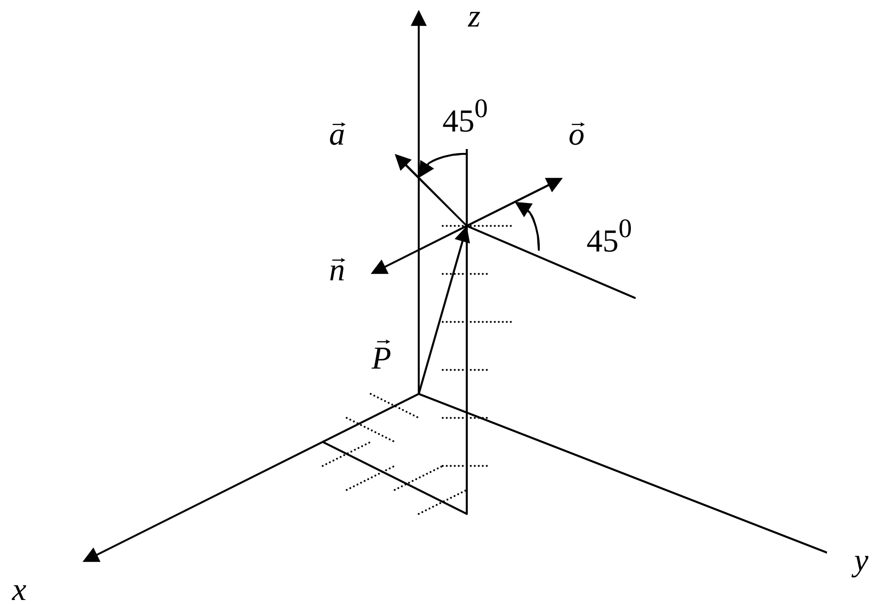
Сл.2.4. Претставување произволен координатен систем во просторот

Првите три вектори во матрицата (2.16) се вектори на правец со $w = 0$, кои го претставуваат правецот на единичните вектори $\vec{n}, \vec{o}, \vec{a}$ од произволниот координатен систем F, додека четвртиот вектор со $w = 1$ ја претставува положбата на координатниот почеток од произволниот координатен систем во однос на референтниот координатен систем.

Пример 2.2. Координатниот систем прикажан на сл.2.5 да се опише со соодветна матрица.

Решение: Како што може да се забележи од сл.2.5, n-оската од координатниот систем F е паралелна со x-оската на референтниот координатен систем, o-оската на координатниот систем F зафаќа агол од 45^0 во однос на y-оската од референтниот координатен систем, а неговата a-оска зафаќа агол од 45^0 во однос на z-оската од референтниот координатен систем, додека неговиот координатен почеток е одреден со координатите $(3,5,7)$. Следствено, овој координатен систем може да се опише со матрицата:

$$(2.17) \quad \underline{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0.707 & -0.707 & 5 \\ 0 & 0.707 & 0.707 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

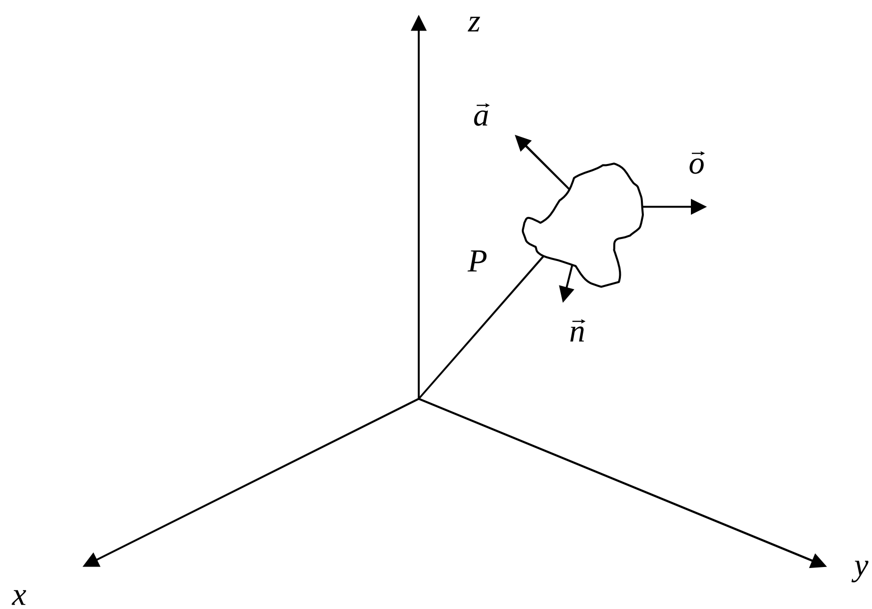


Сл.2.5. Произволен координатен систем во просторот од примерот 2.2

2.3.4. ПРЕТСТАВУВАЊЕ ЦВРСТО ТЕЛО ВО ПРОСТОРОТ

Произволен објект во просторот може да се претстави на тој начин што ќе му се придружи координатен систем и потоа тој координатен систем ќе се претстави во просторот. Положбата и ориентацијата на објектот во однос на придружениот координатен систем се секогаш познати. Оттаму, се` додека координатниот систем придружен со објектот може да се претстави во просторот, ќе биде позната и положбата и ориентацијата на објектот во однос на референтниот координатен систем. Како што е претходно покажано, координатниот систем придружен со набљудуваниот објект во просторот е опишан со следната матрица:

$$\underline{F}_{objekt} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.18}$$



Сл.2.6. Претставување цврсто тело во просторот

Една точка во просторот има само три степени слобода на движење – таа може да се движи само долж x-оската, y-оската и z-оската од референтниот координатен систем. Едно цврсто тело во просторот има 6 степени слобода на движење: тоа не само што може да се движи долж координатните оски од референтниот координатен систем, туку може и да ротира околу нив. Следствено, едно цврсто тело да биде целосно опишано во просторот, потребни се 6 информации. Меѓутоа, во матрицата (2.18) се содржани 12 информации – 9 за ориентација и 3 за положба. Тоа значи дека се потребни дополнителни услови кои бројот информации ќе го ограничат на 6. Овие ограничувања се добиваат од познатите карактеристики на координатниот систем придружен со цврстото тело: трите единични вектори $\vec{n}, \vec{o}, \vec{a}$ се взаемно нормални и должината на единичниот вектор е еднаква на единица, кои резултираат во следните равенства:

(2.19) $\vec{n} \cdot \vec{o} = 0$ (скаларниот производ на векторите мора да биде еднаков на нула)

(2.20) $\vec{n} \cdot \vec{a} = 0$

(2.21) $\vec{a} \cdot \vec{o} = 0$

(2.22) $|\vec{n}| = 1$ (должината на единичниот вектор е еднаква на единица)

(2.23) $|\vec{a}| = 1$

(2.24) $|\vec{o}| = 1$

Првите три равенства (2.19) – (2.21) можат да се заменат со равенството:

(2.25) $\vec{n} \times \vec{o} = \vec{a}$

Пример 2.3. Да се пополнат испуштените елементи од матрицата:

(2.26) $$\underline{F} = \begin{bmatrix} ? & 0 & ? & 5 \\ 0.707 & ? & ? & 3 \\ ? & ? & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Решение: Елементите од последната колона на матрицата ја дефинираат положбата на координатниот почеток од дадениот координатен систем во однос на референтниот. Останатите колони ги дефинираат трите вектори на правец за дадениот координатен систем, а познати се само три елементи од овие колони. Од равенствата (2.19)-(2.24) непосредно следува:

(2.27) $$n_x o_x + n_y o_y + n_z o_z = 0 \Rightarrow n_x \cdot 0 + 0.707 o_y + n_z o_z = 0$$

$$n_x a_x + n_y a_y + n_z a_z = 0 \Rightarrow n_x a_x + 0.707 a_y + n_z \cdot 0 = 0$$

$$a_x o_x + a_y o_y + a_z o_z = 0 \Rightarrow a_x \cdot 0 + a_y o_y + 0 \cdot o_z = 0$$

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \Rightarrow n_x^2 + 0.707^2 + n_z^2 = 1$$

$$o_x^2 + o_y^2 + o_z^2 = 1 \Rightarrow 0^2 + o_y^2 + o_z^2 = 1$$

$$a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 1 \Rightarrow a_x^2 + a_y^2 + 0^0 = 1$$

со што се добива следниот систем равенки:

(2.28) $$0.707 o_y + n_z o_z = 0$$

$$n_x a_x + 0.707 a_y = 0$$

$$a_y o_y = 0$$

$$n_x^2 + 0.707^2 + n_z^2 = 1$$

$$o_y^2 + o_z^2 = 1$$

$$a_x^2 + a_y^2 = 1$$

чие решение е:

(2.29) $n_x = \pm 0.707, n_z = 0, o_y = 0, o_z = 1, a_x = \pm 0.707, a_y = -0.707$

Треба да се забележи дека n_x и a_x мора да имаат ист знак. Бараната матрица е:

(2.30) $$\underline{F} = \begin{bmatrix} 0.707 & 0 & 0.707 & 5 \\ 0.707 & 0 & -0.707 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

или:

(2.31) $$\underline{F} = \begin{bmatrix} -0.707 & 0 & -0.707 & 5 \\ 0.707 & 0 & -0.707 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Причината за повеќекратно решение лежи во фактот дека за дадените параметри секогаш можат да се дефинираат две тројки взаемно нормални вектори со спротивен правец.

Истиот резултат ќе се добие и со помош на равенството (2.25):

(2.32) $$\vec{n} \times \vec{o} = \vec{a} \Rightarrow \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ n_x & n_y & n_z \\ o_x & o_y & o_z \end{vmatrix} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \Rightarrow$$

$$(n_y o_z - n_z o_y)\vec{i} - (n_x o_z - n_z o_x)\vec{j} + (n_x o_y - n_y o_x)\vec{k} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \Rightarrow$$

$$(0.707 o_z - n_z o_y)\vec{i} - (n_x o_z)\vec{j} + (n_x o_y)\vec{k} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \Rightarrow$$

$$0.707o_z - n_z o_y = a_x$$

$$-n_x o_z = a_y$$

$$n_x o_y = 0$$