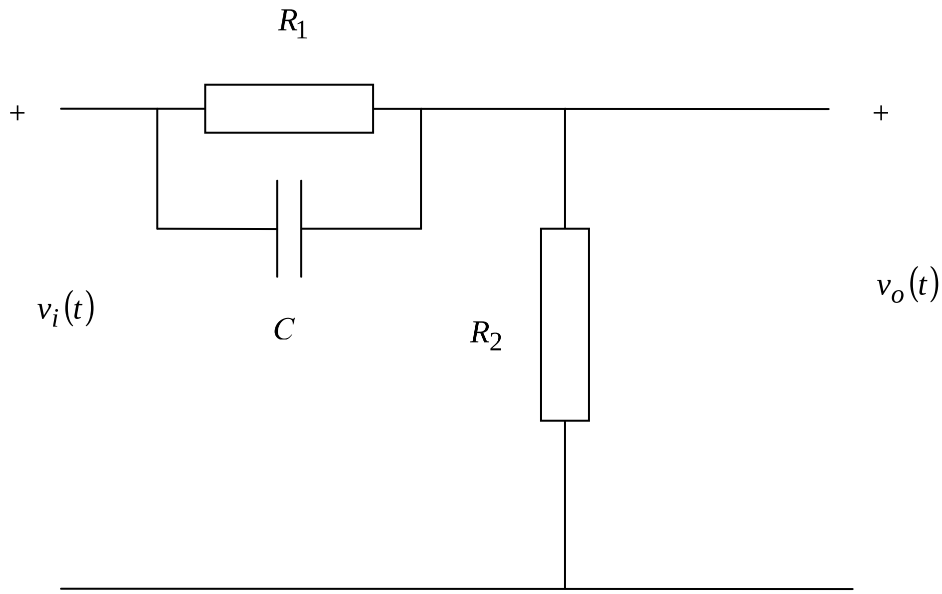
ДОМАШНА РАБОТА БР.1 – РЕШЕНИЈА 06.03.2007

1.1. Да се определи преносната функција на RC-колото од сл.1. Каков вид компензатор реализира дадената електрична шема? Да се определат нулите и половите на дадениот компензатор преку неговите параметри.



Сл.1.1. Илустрација кон задачата 1.1

Решение:

$$C\frac{d}{dt}[v_i(t)-v_o(t)]+\frac{1}{R_1}[v_i(t)-v_o(t)]=\frac{1}{R_2}v_o(t)$$

$$Cs[V_i(s)-V_o(s)]+\frac{1}{R_1}[V_i(s)-V_o(s)]=\frac{1}{R_2}V_o(s)$$

$$G_d(s)=\frac{V_o(s)}{V_i(s)}=\frac{Cs+\frac{1}{R_1}}{Cs+\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}=\frac{s+\frac{1}{R_1C}}{s+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\frac{1}{C}}=\frac{s+a}{s+b};\quad a=\frac{1}{R_1C},b=\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\frac{1}{C}$$

1.2. Преносната функција на еден дискретен водечки (lead) компензатор може да се добие од преносната функција на континуалниот диференцијален (lead) компензатор:

$$G_d(s) = \frac{s+a}{s+b};\ \ b > a$$

со помош на смената $z = e^{sT}$. Во што се пресликуваат нулата $s = -a$ и полот $s = -b$ во z – комплексната рамнина со помош на дадената смена и како изгледа преносната функција $G_d(z)$ на дискретниот еквивалент на континуалниот диференцијален компензатор $G_d(s)$?

Решение: Преносната функција на еден дискретен водечки компензатор има општ облик:

$$G_d(z) = K_d\,\frac{z - z_c}{z - p_c};\ \ z_c > p_c$$

Овој компензатор има нула во точката $z = z_c$ и пол во точката $z = p_c$, при што $z_c > p_c$. Неговиот коефициент на засилување во стационарна состојба изнесува:

$$G_d(1) = K_d\,\frac{1 - z_c}{1 - p_c}$$

Коефициентот на засилување K_d има улога за нагодување на коефициентот на засилување на компензаторот на одредена вредност при одредена фреквенција.

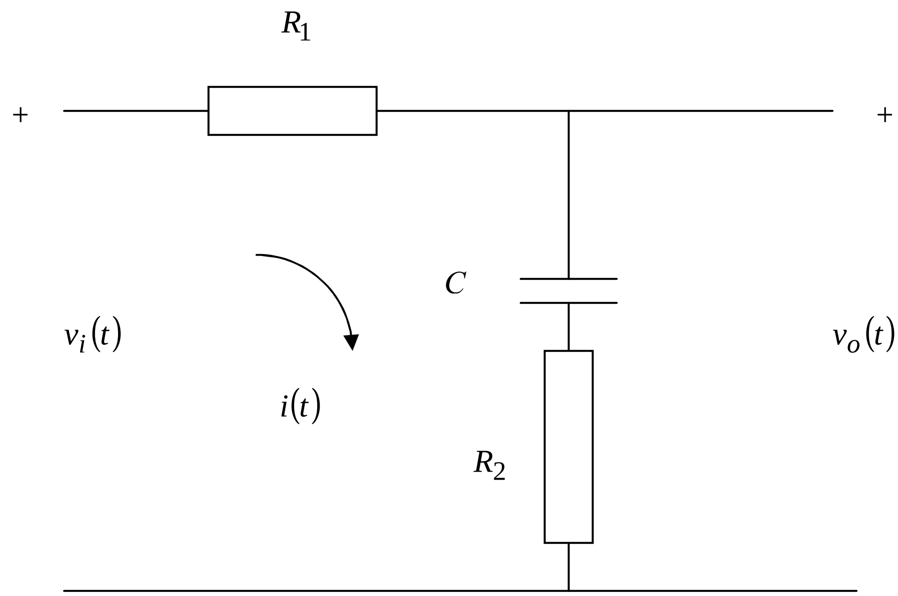
Преносната функција на еден дискретен водечки (lead) компензатор може да се добие од преносната функција на континуалниот диференцијален (lead) компензатор:

$$G_d(s) = \frac{s+a}{s+b};\ \ b > a$$

со помош на смената $z = e^{sT}$. Така, нулата $s = -a$ на континуалниот диференцијален компензатор $G_d(s)$ со смената $z = e^{sT}$ се пресликува во нулата $z_c = e^{-aT}$, додека полот $s = -b$ пресликува во полот $p_c = e^{-bT}$. Така се добива:

$$G_d(z) = K_d\,\frac{z - e^{-aT}}{z - e^{-bT}};\ \ z_c > p_c$$

1.3. Да се определи преносната функција на RC-колото од сл.1.2. Каков вид компензатор реализира дадената електрична шема? Да се определат нулите и половите на дадениот компензатор преку неговите параметри.



Сл.1.2. Илустрација кон задачата 1.3

Решение:

$$R_1 i(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau + R_2 i(t) = v_i(t)$$

$$R_1 I(s) + \frac{1}{Cs} I(s) + R_2 I(s) = \left(R_1 + \frac{1}{Cs} + R_2\right) I(s) = V_i(s)$$

$$V_o(s) = \left(R_2 + \frac{1}{Cs}\right) I(s)$$

$$G_i(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{R_2 + \frac{1}{Cs}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{Cs}} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot \frac{s + \frac{1}{R_2 C}}{s + \frac{1}{(R_1 + R_2)C}} = \frac{a(s+b)}{b(s+a)};$$

$$a = \frac{1}{(R_1 + R_2)C}, \quad b = \frac{1}{R_2 C}$$

1.4. Преносната функција на дискретниот еквивалент на континуалниот интеграционен (lag) компензатор може да се добие преку неговата преносна функција $G_i(s)$:

$$G_i(s) = \frac{a}{b} \cdot \frac{s+b}{s+a}; \quad b > a$$

со помош на смената $z = e^{sT}$. Во што се пресликуваат нулата $s = -b$ и полот $s = -a$ на преносната функција $G_i(s)$ во z – комплексната рамнина со помош на дадената смена и како изгледа преносната функција $G_i(z)$ на дискретниот еквивалент на континуалниот интеграционен компензатор $G_i(s)$?

Решение: Преносната функција на дискретниот еквивалент на еден интегрирачки континуален компензатор има општ облик:

$$G_i(z) = \frac{1-p_c}{1-z_c} \cdot \frac{z-z_c}{z-p_c}; \quad z_c < p_c$$

Овој компензатор има нула во точката $z = z_c$ и пол во точката $z = p_c$, при што $z_c < p_c$. Неговиот коефициент на засилување во стационарна состојба изнесува:

$$G_i(1) = 1$$

Коефициентот на засилување $K_i = \dfrac{1-p_c}{1-z_c}$ има улога за нагодување на коефициентот на засилување на дигиталниот компензатор $G_i(z)$ во стационарна состојба на вредност $G_i(1) = 1$, аналогно на вредноста на коефициентот на засилување кај континуалниот компензатор во стационарна состојба.

Преносната функција на дискретниот еквивалент на континуалниот интегрирачки (lag) компензатор може да се добие од неговата преносна функција:

$$G_i(s) = \frac{a}{b} \cdot \frac{s+b}{s+a}; \quad b > a$$

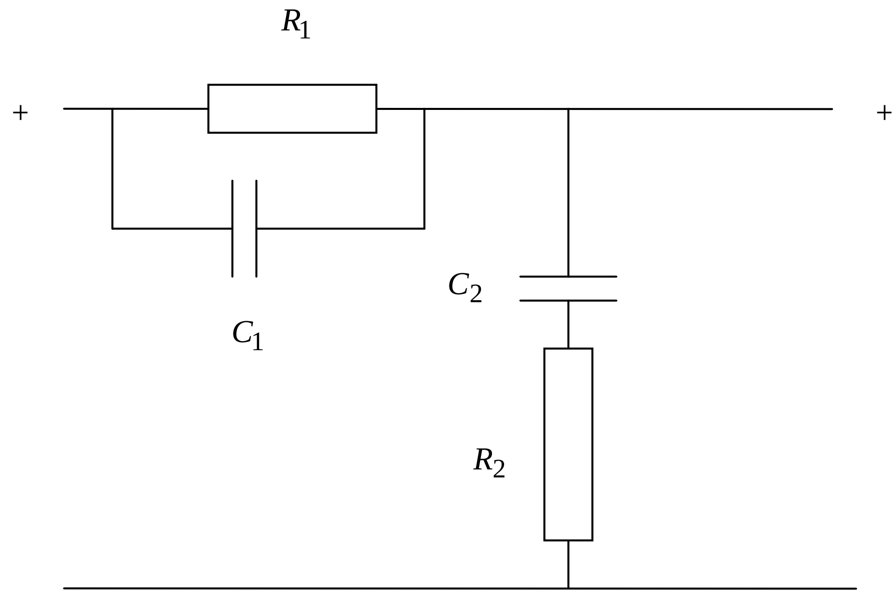
со помош на смената $z = e^{sT}$. Така, нулата $s = -b$ на континуалниот интегрирачки компензатор $G_i(s)$ со смената $z = e^{sT}$ се пресликува во нулата $z_c = e^{-bT}$, додека полот $s = -a$ пресликува во полот $p_c = e^{-aT}$. Така се добива:

$$G_i(z) = \frac{1-e^{-aT}}{1-e^{-bT}} \cdot \frac{z-e^{-bT}}{z-e^{-aT}}; \quad z_c > p_c$$

Може да се забележи дека:

$G_i(1) = 1$

1.5. Да се определи преносната функција на RC-колото од сл.1.3. Каков вид компензатор реализира дадената електрична шема? Да се определат нулите и половите на дадениот компензатор преку неговите параметри.



Сл.1.3. Илустрација кон задачата 1.5

Решение:

$$C_1 \frac{d}{dt}\left[v_i(t) - v_o(t)\right] + \frac{1}{R_1}\left[v_i(t) - v_o(t)\right] = i(t)$$

$$\frac{1}{C_2}\int_0^t i(\tau)d\tau + R_2 i(t) = v_o(t)$$

$$\left(\frac{1}{R_1} + C_1 s\right)\left[V_i(s) - V_o(s)\right] = \frac{V_o(s)}{R_2 + \dfrac{1}{Cs}}$$

$$G_{di}(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\left(s + \dfrac{1}{R_1C_1}\right)\left(s + \dfrac{1}{R_2C_2}\right)}{s^2 + \left(\dfrac{1}{R_1C_1} + \dfrac{1}{R_2C_2} + \dfrac{1}{R_2C_1}\right)s + \dfrac{1}{R_1C_1R_2C_2}} = \frac{(s+a_1)(s+b_2)}{(s+b_1)(s+a_2)};$$

$$a_1 = \frac{1}{R_1 C_1}, \quad b_1 a_2 = a_1 b_2, \quad b_1 + a_2 = a_1 + b_2 + \frac{1}{R_2 C_1}, \quad b_2 = \frac{1}{R_2 C_2}$$

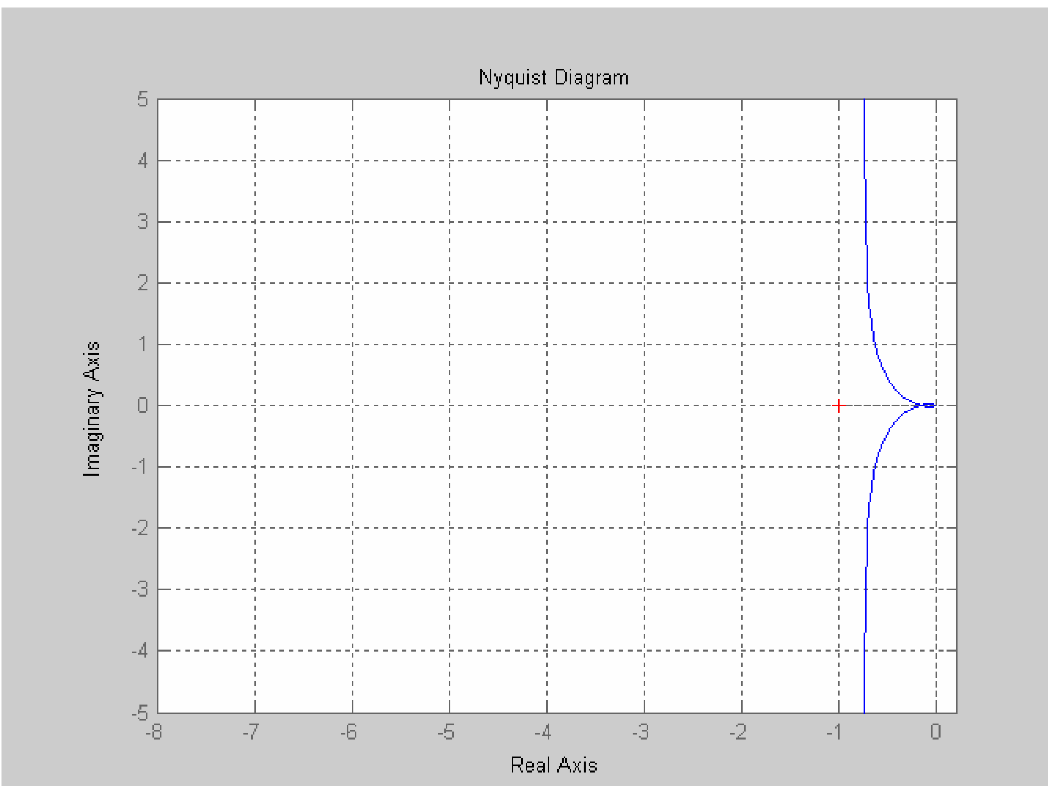
Електричната шема од сл. 1.3 реализира диференцијално-интегрирачки компензатор.

1.6. На ист дијаграм да се нацртаат фреквентните карактеристики на соодветниот отворен систем за дадениот затворен систем со единична негативна повратна врска, ако преносната функција на отворениот систем $G_0(s)$ е од облик:

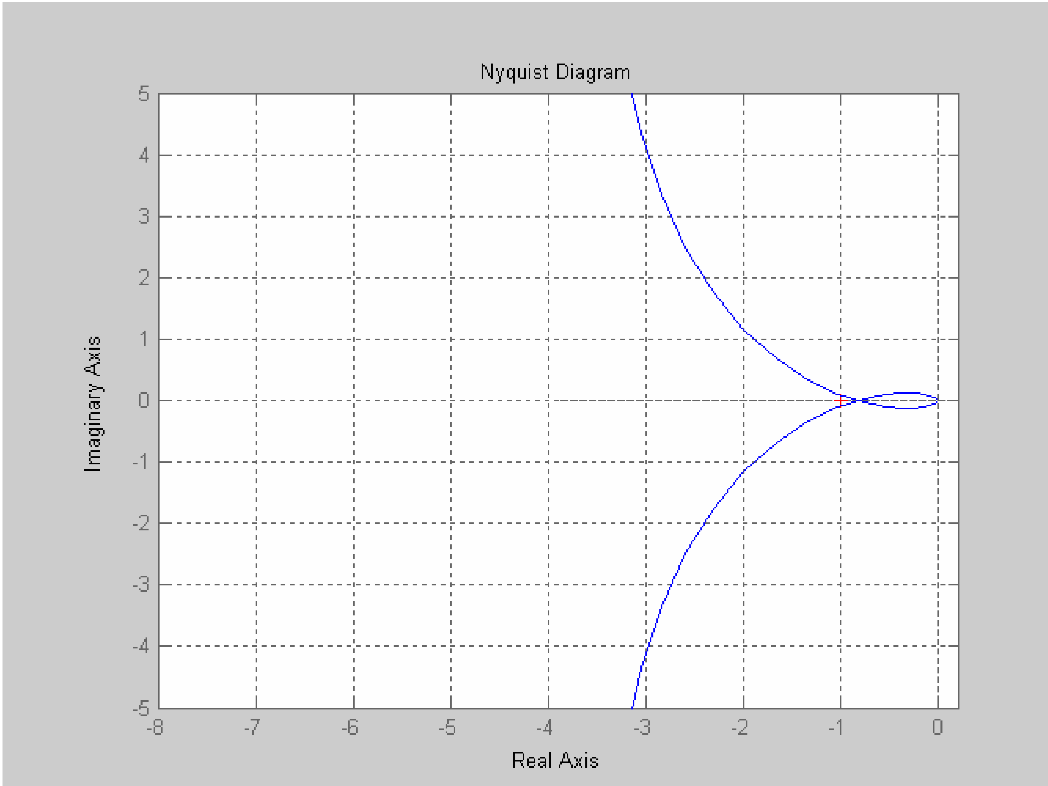
$$G_0(s) = \frac{K}{s(s+p_1)(s+p_2)}; \quad K, p_1, p_2 > 0$$

Дијаграмите да се нацртаат за неколку вредности $K_3 > K_2 > K_1$ на коефициентот на засилување K. Што може да се забележи – дали зголемувањето на вредноста на коефициентот на засилување K влијае врз стабилноста на затворениот систем? (Упатство: Графиците да се цртаат со помош на МАТЛАБ, на пример, за $K = 1, 5, 10$ и $p_1 = 1, p_2 = 2.$)

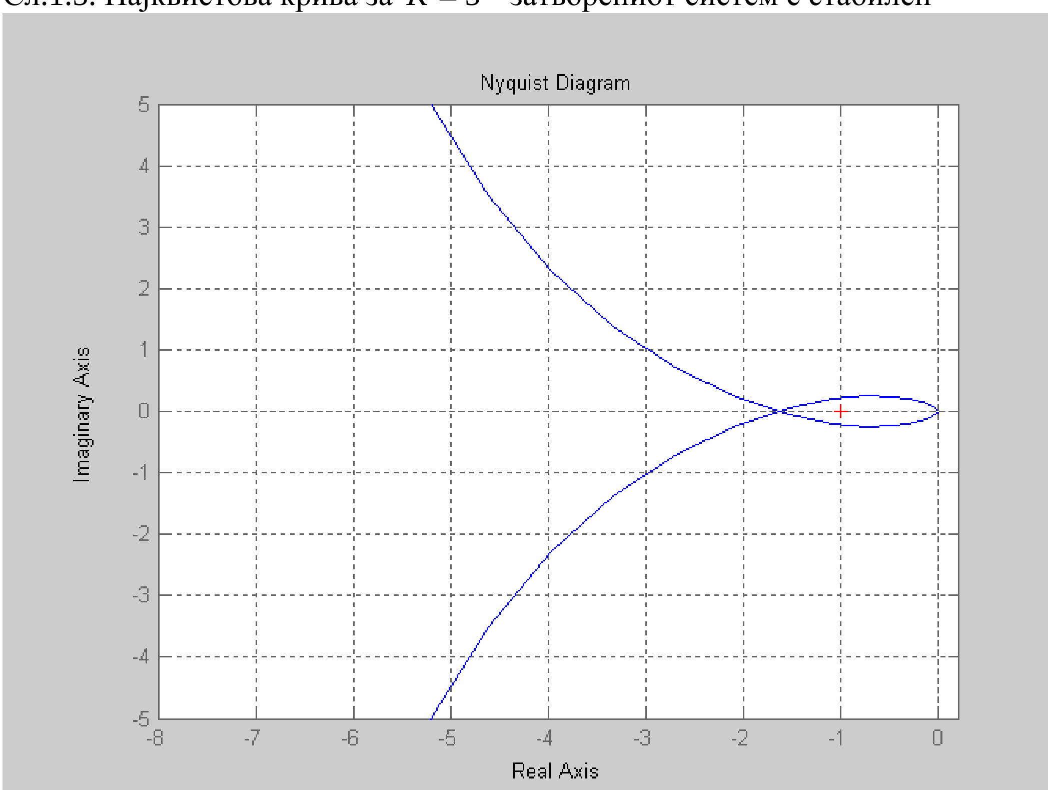
Решение:



Сл.1.4. Најквистова крива за $K = 1$ - затворениот систем е стабилен



Сл.1.5. Најквистова крива за $K = 5$ - затворениот систем е стабилен



Сл.1.6. Најквистова крива за $K = 10$ - затворениот систем е нестабилен

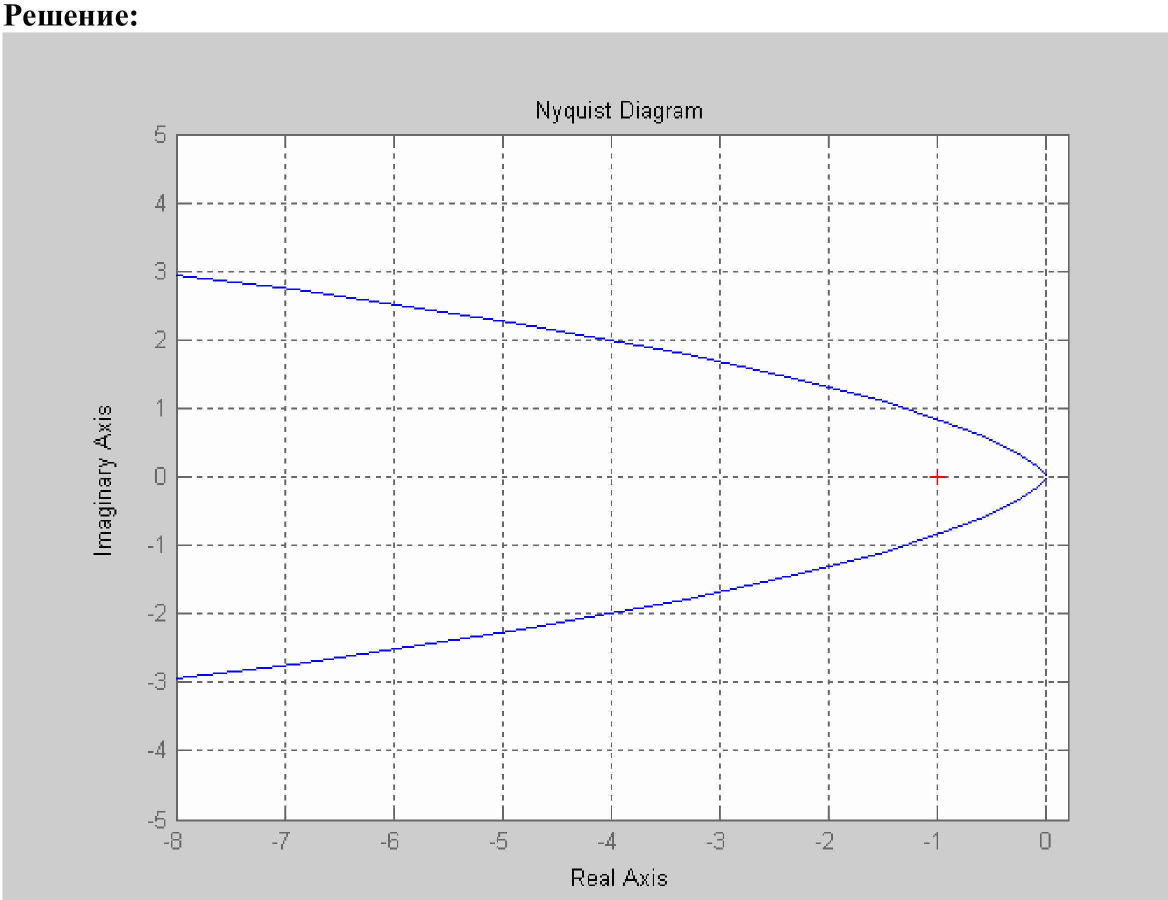
Бидејќи соодветниот отворен систем нема полови во десната полурамнина од s-комплексната рамнина, следува дека затворениот систем ќе биде стабилен доколку Најквистовата крива не ја опфаќа критичната точка (-1,j0). Од дијаграмите добиени за $K_3 = 10 > K_2 = 5 > K_1 = 1$ се гледа дека со зголемувањето на вредноста за K во одреден момент фреквентната карактеристика на отворениот систем ќе ја опфати критичната точка, што значи дека затворениот систем ќе стане нестабилен.

1.7. Да се нацрта фреквентната карактеристика на соодветниот отворен систем за дадениот затворен систем со единична негативна повратна врска, ако преносната функција на отворениот систем $G_0(s)$ е од облик:

$$G_0(s) = \frac{K}{s^2(s+p_1)}; K, p_1 > 0$$

Што може да се каже за стабилноста на затворениот систем? Дали промената на вредноста на коефициентот на засилување K на отворениот систем влијае врз стабилноста на затворениот систем? (Упатство: Графикот да се црта со помош на МАТЛАБ, на пример, за $K = 10$ и $p_1 = 2$.)

Решение:



Сл.1.7. Најквистова крива - затворениот систем е нестабилен за секое K

Затворениот систем е суштински нестабилен, бидејќи не постои вредност на K за која тој би станал стабилен. Ова се должи на фактот дека за $0 < \omega < \infty$ фреквентната карактеристика на соодветниот отворен систем постојано се наоѓа над реалната оска.