ДОМАШНА РАБОТА БР.2 - РЕШЕНИЈА 26.03.2007

2.1. Да се нацрта фреквентната карактеристика на дискретниот еквивалент на диференцијалниот компензатор:

$$G_d(z) = \frac{a}{b} \cdot \frac{1-e^{-bT}}{1-e^{-aT}} \cdot \frac{z-e^{-aT}}{z-e^{-bT}}; \quad a < b$$

(Упатство: Да се усвои $a = 1, b = 2$.)

Решение: Фреквентната преносна функција на дадениот дискретен компензатор е:

$$G_d(j\omega) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-e^{-2T}}{1-e^{-T}} \cdot \frac{e^{j\omega T_0} - e^{-T}}{e^{j\omega T_0} - e^{-2T}}$$

За да се нацрта неговата фреквентна карактеристика, треба да се определат нејзините карактеристични точки – почетокот за $\omega = 0$, крајот за $\omega = \frac{\omega_0}{2}$, пресеците со координатните оски и, евентуално, нејзините екстреми. (Притоа, со T_0 е означен периодот на дискретизација, а со ω_0 соодветната фреквенција на дискретизација.)

Од изразот за $G_d(j\omega)$, за $\omega = 0$ се добива:

$$G_d(j0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-e^{-2T}}{1-e^{-T}} \cdot \frac{1-e^{-T}}{1-e^{-2T}} = 1$$

што значи дека бараната фреквентна карактеристика започнува во точката $\left(\frac{1}{2}, j0\right)$ на реалната оска, додека за $\omega = \frac{\omega_0}{2}$ се добива:

$$G_d\left(j\frac{\omega_0}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-e^{-2T}}{1-e^{-T}} \cdot \frac{-1-e^{-T}}{-1-e^{-2T}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-e^{-2T}}{1-e^{-T}} \cdot \frac{1+e^{-T}}{1+e^{-2T}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(1+e^{-T}\right)^2}{1+e^{-2T}}$$

што значи дека фреквентната карактеристика на набљудуваниот дискретен компензатор исто така завршува во конечна точка на реалната оска во $G_d(j\omega)$– рамнината. Тоа е точката $\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\left(1+e^{-T}\right)^2}{1+e^{-2T}}, j0\right]$ која за $T = 1$, на пример, изнесува $(0.8, j0)$.

Од изразите за реалниот и имагинарниот дел на фреквентната преносна функција $G_d(j\omega)$, може да се заклучи дека бараната фреквентна карактеристика нема пресеци со координатните оски, што значи дека ќе се наоѓа исклучиво во десната полурамнина од комплексната $G_d(j\omega)$-рамнина:

$$U(\omega)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-e^{-2T}}{1-e^{-T}}\cdot\frac{\left(1+e^{-3T}\right)-e^{-T}\left(1+e^{-T}\right)\cos\omega T_0}{1-2e^{-2T}\cos\omega T_0+e^{-4T}}=0$$

нема пресеци со имагинарната оска

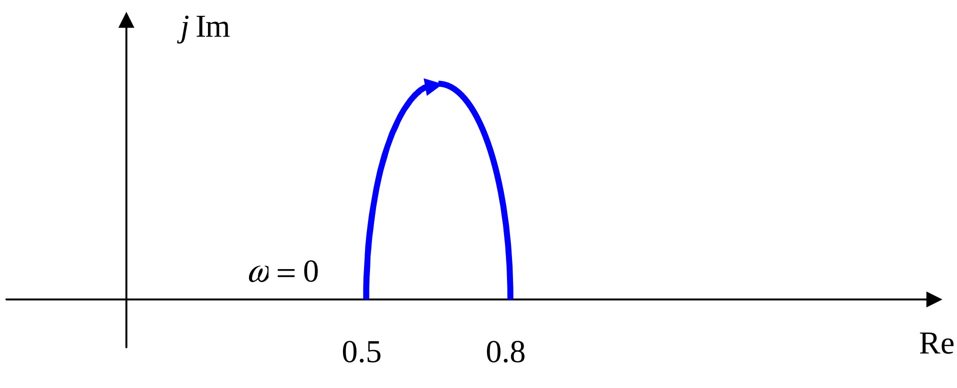
(равенката нема реално решение -зошто?)

$$V(\omega)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-e^{-2T}}{1-e^{-T}}\cdot\frac{e^{-T}\left(1-e^{-T}\right)\sin\omega T_0}{1-2e^{-2T}\cos\omega T_0+e^{-4T}}=0$$

нема пресеци со реалната оска

(решенијата за $\omega T_0=0$ и $\omega T_0=\pi$ ги дефинираат почетната и крајната точка на карактеристиката)

Останува уште да се определи квадрантот во кој ќе се наоѓа фреквентната карактеристика на зададениот дискретен компензатор, што се прави врз основа на знакот на реалниот и имагинарниот дел на фреквентната преносна функција $G_d(j\omega)$.



Сл.2.1. Квалитативен приказ на фреквентната карактеристика на дискретниот компензатор од задачата 2.1

Имено, за $0\le\omega\le\frac{\omega_0}{2}$ изразот за $U(\omega)$ и $V(\omega)$ никогаш не е негативен:

$$U(\omega)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-e^{-2T}}{1-e^{-T}}\cdot\frac{\left(1+e^{-3T}\right)-e^{-T}\left(1+e^{-T}\right)\cos\omega T_0}{1-2e^{-2T}\cos\omega T_0+e^{-4T}}>0 \quad \forall \quad 0\le\omega\le\frac{\omega_0}{2}$$

$$V(\omega)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-e^{-2T}}{1-e^{-T}}\cdot\frac{e^{-T}\left(1-e^{-T}\right)\sin\omega T_0}{1-2e^{-2T}\cos\omega T_0+e^{-4T}}\geq 0\quad\forall\quad 0\leq\omega\leq\frac{\omega_0}{2}$$

Следствено, бараната фреквентна карактеристика ќе се наоѓа во првиот квадрант од $G_d(j\omega)$-комплексната рамнина и квалитативно ќе изгледа како што е прикажано на сл.2.1.

2.2. Да се нацрта фреквентната карактеристика на дискретниот аналог на интегрирачкиот компензатор:

$$G_i(z)=\frac{1-p_c}{1-z_c}\cdot\frac{z-z_c}{z-p_c};\quad z_c<p_c$$

за $z_c=0.86; p_c=0.97$.

Решение: Фреквентната преносна функција на зададениот дискретен компензатор е:

$$G_i(j\omega)=\frac{1-p_c}{1-z_c}\cdot\frac{e^{j\omega T}-z_c}{e^{j\omega T}-p_c}=\frac{0.03}{0.14}\cdot\frac{e^{j\omega T}-0.86}{e^{j\omega T}-0.97}$$

Почетокот на бараната фреквентна карактеристика се добива за $\omega=0$:

$$G_i(j0)=\frac{1-p_c}{1-z_c}\cdot\frac{1-z_c}{1-p_c}=1$$

и тој се наоѓа во точката $(1, j0)$ на реалната оска.

Фреквентната карактеристика на набљудуваниот дискретен компензатор завршува за $\omega=\frac{\omega_0}{2}$:

$$G_i\left(j\frac{\omega_0}{2}\right)=\frac{1-p_c}{1-z_c}\cdot\frac{-1-z_c}{-1-p_c}=\frac{1-p_c}{1-z_c}\cdot\frac{1+z_c}{1+p_c}=\frac{(1-z_cp_c)-(p_c-z_c)}{(1-z_cp_c)+(p_c-z_c)}\approx 0.2$$

повторно на реалната оска во точката $(0.2, j0)$.

Равенката:

$$U(\omega)=\frac{1-p_c}{1-z_c}\cdot\frac{(1+z_cp_c)-(z_c+p_c)\cos\omega T_0}{1-2p_c\cos\omega T_0+p_c^2}=0$$

нема реални решенија (зошто?), што значи дека бараната фреквентна карактеристика нема пресеци со имагинарната оска, додека единствените решенија на равенката:

$$V(\omega)=\frac{1-p_c}{1-z_c}\cdot\frac{(z_c-p_c)\sin\omega T_0}{1-2p_c\cos\omega T_0+p_c^2}=0$$

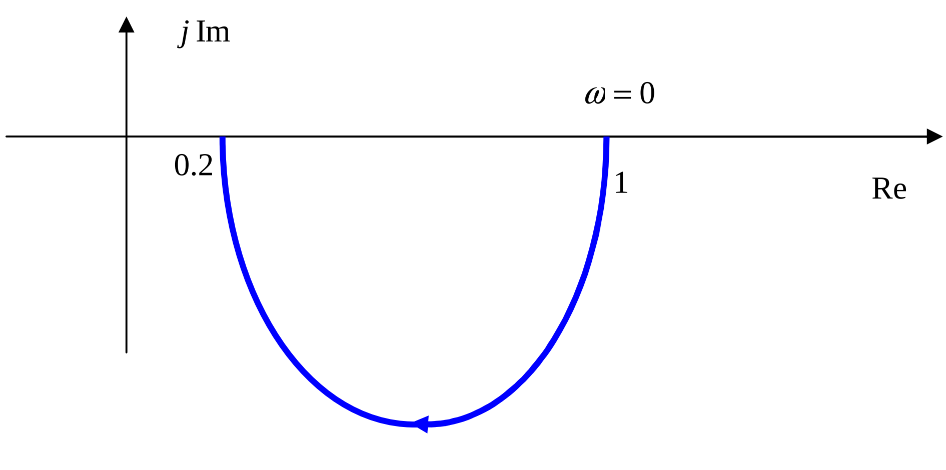
за $\omega T_0=0$ и $\omega T_0=\pi$ ги дефинираат крајните точки на карактеристиката, што значи дека таа нема пресеци ни со реалната оска. Останува да се определи квадрантот во кој се наоѓа бараната фреквентна карактеристика, врз основа на знакот на реалниот и имагинарниот дел на фреквентната преносна функција $G_i(j\omega)$. Со мала анализа се заклучува дека имагинарниот дел $V(\omega)$ на фреквентната преносна функција $G_i(j\omega)$ никогаш не е позитивен:

$$V(\omega)=\frac{1-p_c}{1-z_c}\cdot\frac{(z_c-p_c)\sin\omega T_0}{1-2p_c\cos\omega T_0+p_c^2}\le 0 \quad \forall \quad 0\le\omega\le\frac{\omega_0}{2} \qquad (z_c-p_c<0)$$

додека реалниот дел $U(\omega)$ на фреквентната преносна функција $G_i(j\omega)$ секогаш е позитивен:

$$U(\omega)=\frac{1-p_c}{1-z_c}\cdot\frac{(1+z_c p_c)-(z_c+p_c)\cos\omega T_0}{1-2p_c\cos\omega T_0+p_c^2}>0 \quad \forall \quad 0\le\omega\le\frac{\omega_0}{2}$$

Следствено, бараната фреквентна карактеристика ќе се наоѓа во третиот квадрант и нејзиниот квалитативен изглед е прикажан на сл.2.2.



Сл.2.2. Квалитативен приказ на фреквентната карактеристика на дискретниот компензатор од задачата 2.2

2.3. Со кој вид компензација може да се стабилизира системот од задачата 1.7? Да се објасни.

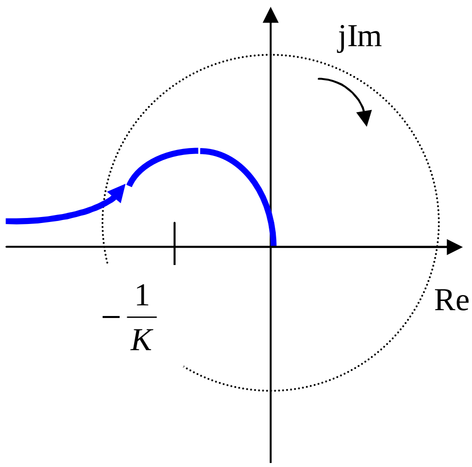
Решение: Зададениот затворен линеарен стационарен континуален динамички систем со единична негативна повратна врска, чиј отворен систем е опишан со преносната функција $G_0(s)$ од облик:

$$G_0(s) = \frac{K}{s^2(s+p_1)}; K, p_1 > 0$$

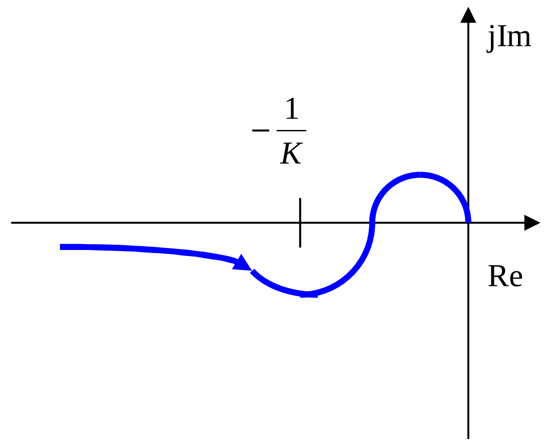
е нестабилен за секое K. Следствено, не постои вредност за K за која системот би се стабилизирал. Од (во основа) иста причина, системот не може да се стабилизира ни по пат на сериска компензација со интегрирачки компензатор.

Набљудуваниот затворен систем може да се стабилизира по пат на сериска компензација со диференцијален компензатор. Проблем може да се јави ако компензираниот систем треба да има помал пропусен опсег од опсегот кој може да се постигне со диференцијалниот компензатор. Во тие случаи се применува сериска компензација со интегро-диференцирачки компензатор. Серискатa компензација со интегро-диференцирачки компензатор обезбедува задоволително поведение на стабилниот компензирант систем како во преодниот така и во стационарниот режим и потоесен пропусен опсег отколку опсегот кој би се добил ако се примени само диференцијален компензатор.

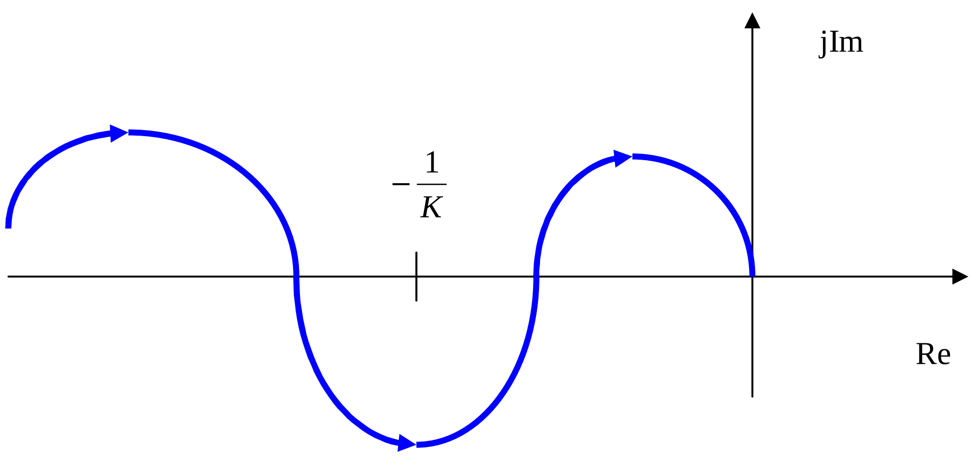
Решението на поставената задача е илустрирано на сл.2.3.



а) Најквистова крива на некомпензираниот систем



б) Најквистова крива на компензираниот систем со диференцијален компензатор



в) Најквистова крива на компензираниот систем со интегро-диференцијален компензатор

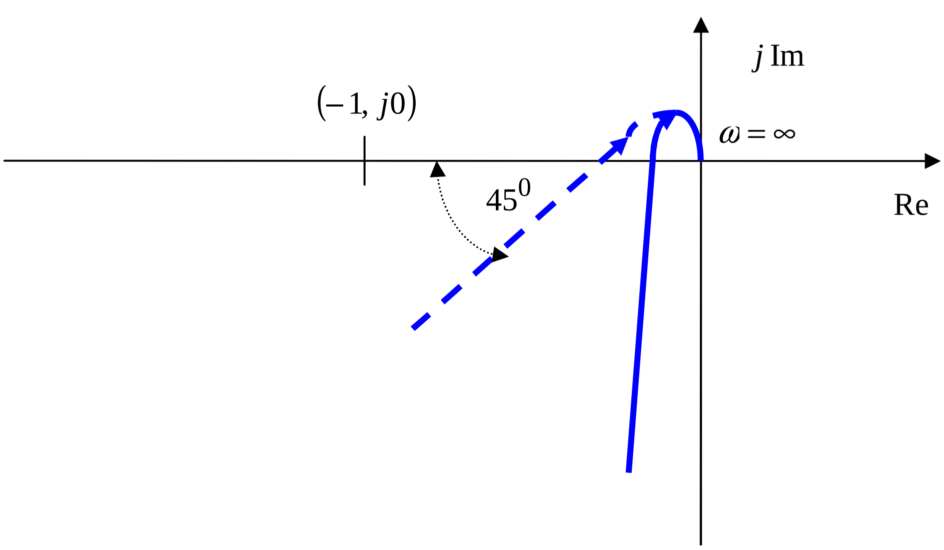
Сл.2.3. а) Најквистовата крива на некомпензираниот систем ја опфаќа критичната точка $\left(-\frac{1}{K}, j0\right)$ за секое K; б) Сериската компензација со диференцијален компензатор обезбедува Најквистовата крива на компензираниот систем да не ја опфаќа критичната точка $\left(-\frac{1}{K}, j0\right)$ за одредени вредности на K; в) Сериската компензација со интегро-диференцијален компензатор обезбедува Најквистовата крива на компензираниот систем да не ја опфаќа критичната точка $\left(-\frac{1}{K}, j0\right)$ за одредени вредности на K

2.4. Да се определи видот компензатор кој ќе обезбеди резерва на фаза од приближно 45^0 ако преносната функција на објектот е:

$$G_{ob}(s) = \frac{4}{s\left(s^2 + 3.2s + 64\right)}$$

Притоа, одзивот на компензираниот систем при високи фреквенции треба да остане приближно еднаков на одзивот на некомпензираниот систем во истото фреквентно подрачје.

Решение: Фреквентната карактеристика на објектот $G_{ob}(s)$ е прикажана квалитативно на сл.2.4. Како што може да се забележи, таа е многу блиску до имагинарната оска за сите вредности на фреквенцијата. Резервата на фаза на објектот е приближно 90^0, па поставената задача може да се реши било со зголемување на факторот на засилување на објектот, било преку сериска компензација со интегрирачки компензатор. Бидејќи интегрирачкиот компензатор обезбедува пригушување во подрачјето на високите фреквенции, а неговото влијание врз фазата е во подрачјето на ниски фреквенции, со оглед на вториот услов од задачата, најдобро е поставениот проблем да се реши со комбинација на двете постапки на синтеза – преку нагодување на коефициентот на засилување на отворениот систем и со воведување на интегрирачки компензатор. Се разбира, ова не е единственото решение на поставениот проблем. Постојат многу други решенија (различни мрежи и преносни функции), кои исто така можат да обезбедат реализација на поставените проектни барања. Меѓутоа, интегрирачкиот компензатор и засилувачот имаат предност заради нивната стандардизација, достапноста и едноставноста на самата постапка на синтеза.



Сл.2.4. Квалитативен приказ на Најквистовата крива за некомпензираниот систем (со полна линија) и компензираниот систем (со испрекината линија)

2.5. Да се дефинира синтезата на затворен систем на автоматско управување со единична негативна повратна врска, кој ќе ги исполни следните барања:

1. Резерва на фаза $\cong 45^0$
2. Брзинска константа $K_v = 50$
3. Пропусниот опсег на компензираниот систем мора да биде еднаков или не многу поголем од пропусниот опсег на некомпензираниот систем
4. Доминантната временска константа на компензираниот систем мора да остане приближно еднаква со доминантната временска константа на некомпензираниот систем

ако преносната функција на соодветниот отворен систем е од облик:

$$G_0(s) = \frac{2000}{s(s+5)(s+10)}$$

Решение: Со едноставни пресметки може да се утврди дека некомпензираниот систем е нестабилен (на пример, со примена на Рут-Шуровиот критериум за испитување на стабилноста на еден линеарен стационарен континуален динамички систем). Следствено, компензацијата на зададениот систем е неопходна.

Брзинската константа на некомпензираниот систем е:

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG_0(s) = \lim_{s \to 0} s\frac{2000}{s(s+5)(s+10)} = 40$$

па вториот услов од задачата може да се оствари ако во директната гранка од системот се додаде засилување од $\frac{5}{4}$, така што засилувањето на компензираниот отворен систем би било 2500. Меѓутоа, зголемувањето на коефициентот на засилување на отворениот систем води кон дополнително зголемување на нестабилноста на затворениот систем. Оттука, потребна е дополнителна компензација со некој вид компензатор. Со оглед на третиот услов од задачата, примената на диференцијален компензатор најверојатно е несоодветна (зошто?), додека примената на интегрирачки компензатор е несоодветна заради последното проектно барање. Оттука, поставените проектни барања (односно поставените услови на синтеза) можат да се реализираат само со сериска компензација со помош на интегро-диференцирачки компензатор. Интегрирачкиот дел од компензаторот ќе обезбеди задоволување на третото проектно барање, додека диференцирачкиот дел од компензаторот ќе обезбеди исполнување на првото и четвртото проектно барање. (Вториот услов од задачата се реализира со нагодување на коефициентот на засилување на отворениот систем, како што беше дискутирано погоре.)

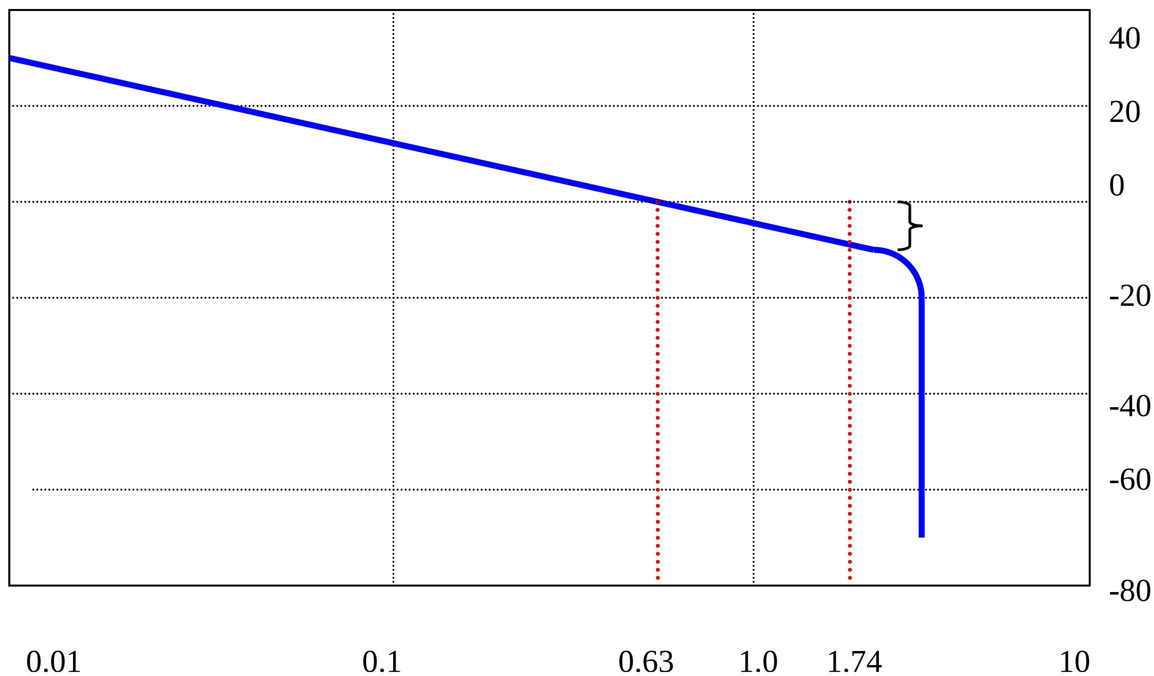
2.6. За затворениот дискретен систем со единична негативна повратна врска, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(z) = \frac{3(z+1)\left(z+\frac{1}{3}\right)}{8z(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$

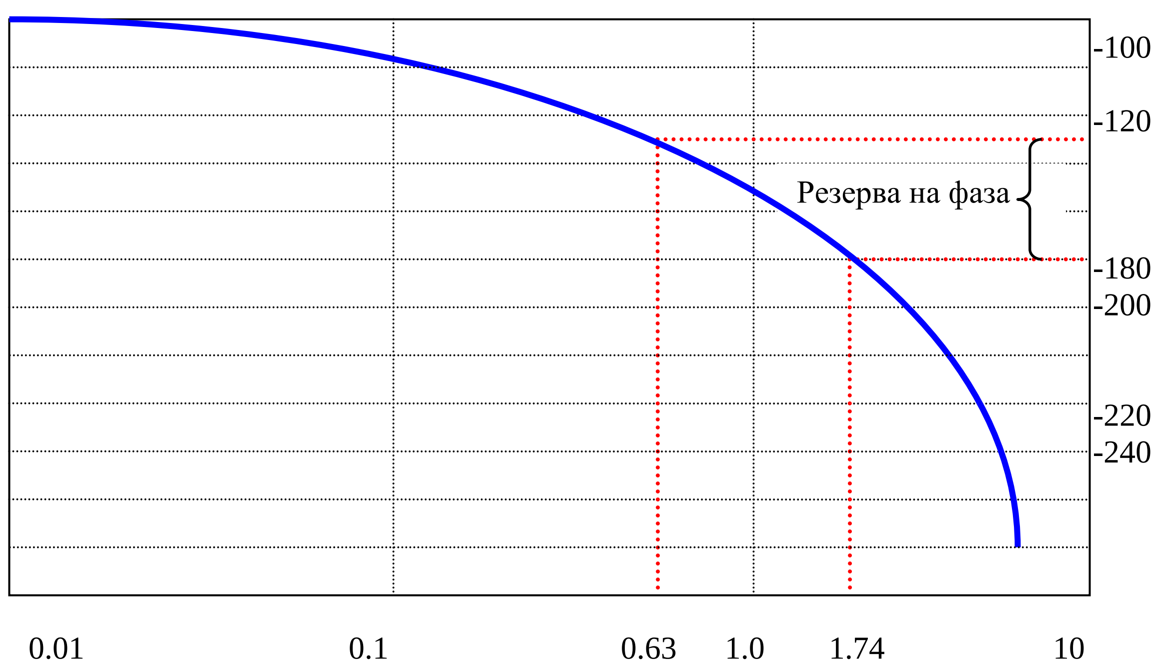
да се определи:

1. резервата на засилување
2. резервата на фаза
3. пресечната фреквенција на засилување
4. пресечната фреквенција на фаза

Решение: Бодеовите дијаграми на слабеење и фаза на зададениот отворен систем $G_0(z)$ се прикажани на сл.2.5 и сл.2.6. Пресечната фреквенција на фаза ω_π се определува од Бодеовиот дијаграм на слабеење и таа изнесува $\omega_\pi T = 1.74 rad$. Тоа е фреквенцијата за која аргументот на фреквентната преносна функција $G_0(j\omega)$ на отворениот систем $G_0(z)$ за набљудуваниот затворен систем има вредност -180^0. Резервата на засилување се определува од Бодеовиот дијаграм на слабеење за $\omega_\pi T = 1.74 rad$ и таа изнесува $11 dB$. Пресечната фреквенција на засилување ω_1 се одредува од истиот дијаграм и таа изнесува $\omega_1 T = 0.63 rad$. Тоа е фреквенцијата за која модулот на фреквентната преносна функција $G_0(j\omega)$ на отворениот систем $G_0(z)$ за набљудуваниот затворен систем има вредност 1. За оваа фреквенција Бодеовиот дијаграм на слабеење на отворениот систем минува низ нулата односно ја сече хоризонталната оска. Резервата на фаза се определува од Бодеовиот дијаграм на фаза за $\omega_1 T = 0.63 rad$ и таа изнесува $\varphi_{rf} = 57^0$.



Сл.2.5. Бодеов дијаграм на слабеење за отворениот систем $G_0(z)$ од задачата 2.6



Сл.2.6. Бодеов дијаграм на фаза за отворениот систем $G_0(z)$ од задачата 2.6

2.7. Да се изврши фреквентна синтеза со компензација на затворен дискретен систем на автоматско управување со единична негативна повратна врска, ако соодветниот отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G_o(z)=\frac{3(z+1)\left(z+\frac{1}{3}\right)}{8z\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$

така што компензираниот систем да ги исполнува следните барања:

1. Стационарната грешка мора да биде еднаква или помала од 0.2 за линеарно растечка влезна возбуда.

2. Резервата на фаза мора да биде еднаква или поголема од 30^0.

3. Пресечната фреквенција на засилување ω_1 мора да биде еднаква или поголема од $\frac{1}{T}$, каде што $T = 0.1s$.

Решение: Отворениот систем $G_o(z)$ има астатизам од 0-ти ред, што значи дека стационарната грешка на затворениот систем за линеарно растечка влезна возбуда е бесконечно голема. За да се обезбеди конечна стационарна грешка, отворениот систем мора да има астатизам од прв ред, што значи дека треба да има прост пол во $z=1$. Така преносната функција на компензираниот отворен систем треба да биде од облик:

$$\tilde{G}_o(z)=\frac{3(z+1)\left(z+\frac{1}{3}\right)}{8z(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$

Брзинската константа на затворениот систем, чиј отворен систем има преносна функција $\tilde{G}_o(z)$ е:

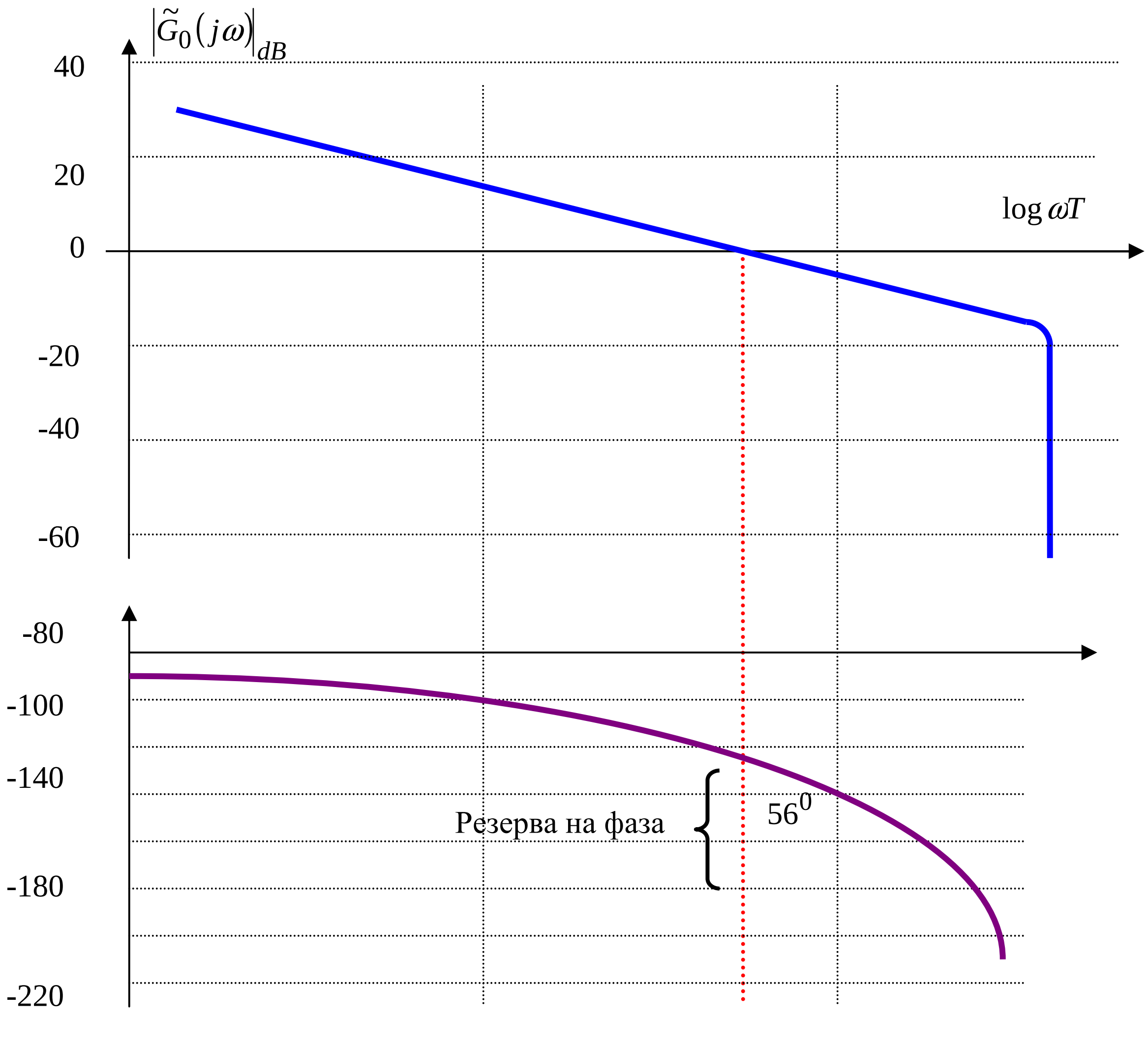
$$K_v=\lim_{z\to 1}(z-1)\tilde{G}_0(z)=\frac{3\cdot 2\cdot \frac{4}{3}}{8\cdot 1\cdot \frac{3}{2}}=\frac{2}{3}$$

а неговата стационарна грешка за линеарно растечка влезна возбуда изнесува:

$$e(\infty)=\frac{1}{K_v}=\frac{3}{2}$$

Оваа вредност не го задоволува првиот услов на синтезата, па мора да се изврши нагодување на коефициентот на засилување на отворениот систем $\tilde{G}_o(z)$ за фактор $\frac{15}{2}$, така што новата преносна функција на компензираниот отворен систем ќе биде:

$$\hat{G}_o(z) = \frac{45(z+1)\left(z+\frac{1}{3}\right)}{16z(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$



Сл.2.7. Бодеови дијаграми на слабеење и фаза на отворениот систем $\tilde{G}_o(z)$

Бодеовите дијаграми на слабеење и фаза на отворениот систем $\tilde{G}_o(z)$ се прикажани на сл.2.7, од каде се гледа дека пресечната фреквенција на засилување на системот е $\omega_1 T = 0.68 rad$, а неговата резерва на фаза изнесува 56^0 . Меѓутоа, со зголемување на коефициентот на засилување $K = \frac{3}{8}$ за 7.5 пати, пресечната фреквенција на засилување се зголемува на вредност $\hat{\omega}_1 T = 2.56 rad$, а резервата на фаза станува негативна -41^0, што доведува до дестабилизација на компензираниот затворен систем. Следствено, потребна е дополнителна компензација на зададениот систем.

За да се доврши процесот на синтеза, со смената $z = \frac{1+s}{1-s}$ се префрламе во s-рамнината:

$$\tilde{G}_o(s) = \frac{3\left(\frac{1+s}{1-s}+1\right)\left(\frac{1+s}{1-s}+\frac{1}{3}\right)}{8\frac{1+s}{1-s}\left(\frac{1+s}{1-s}-1\right)\left(\frac{1+s}{1-s}+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{2}{1-s}\right)\left(\frac{4+2s}{1-s}\right)}{4\frac{1+s}{1-s}\left(\frac{2s}{1-s}\right)\left(\frac{3+s}{1-s}\right)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{(1-s)\left(1+\frac{s}{2}\right)}{s(1+s)\left(1+\frac{s}{3}\right)}$$

Бодеовите дијаграми на слабеење и фаза на системот $\tilde{G}_o(s)$ се прикажани на сл.2.8.

(да се доврши)