ДОМАШНА РАБОТА БР.3 – РЕШЕНИЈА 10.04.2007

3.1. Како можат да се определат нулите на полиномот:

$$s^2+6s+18$$

со помош на постапката геометриско место на корени?

Одговор: Бидејќи геометрискотo место на корени е графички приказ на положбата на корените од карактеристичната равенка на набљудуваниот затворен систем во функција од коефициентот на засилување K на соодветниот отворен систем, нулите на дадениот полином можат да се определат од геометриското место на корени на секој систем, чиј карактеристичен полином, за конкретна вредност на K, е идентичен со дадениот полином. Така, на пример, затворениот систем, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(s)=\frac{K}{s(s+6)}$$

има карактеристичен полином:

$$a(s)=s^2+6s+K$$

кој за $K=18$ станува идентичен со даденот полином. Оттука, нулите на полиномот $s^2+6s+18$ се наоѓаат на геометриското место на корени од затворениот систем, чиј отворен систем е опишан со преносната функција $G_0(s)=\frac{K}{s(s+6)}$, во точки за кои е $K=18$.

Се разбира, постојат и други решенија. На пример, затворениот систем, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(s)=\frac{K}{(s+2)(s+4)}$$

исто така има карактеристичен полином идентичен со зададениот, но сега за $K=10$.

3.2. Даден е линеарен континуален затворен динамички систем, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(z)=\frac{K}{(s+1)(s+2)(s+4)};\quad K>0$$

Да се покаже дека точката $p_1 = -1 + j\sqrt{3}$ лежи на геометриското место корени на овој систем и да се определи вредноста на коефициентот на засилување K на отворениот систем во таа точка.

Решение: Точката $p_1 = -1 + j\sqrt{3}$ го задоволува критериумот на аргументот за $K > 0$:

$$\arg\left[\frac{G_0(p_1)}{K}\right] = \arg\frac{1}{(p_1+1)(p_1+2)(p_1+4)} = \arg\frac{1}{j\sqrt{3}(1+j\sqrt{3})(3+j\sqrt{3})} =$$

$$= -90^0 - 60^0 - 30^0 = -180^0$$

а од критериумот на модулот непосредно следува:

$$K = \left|\frac{j\sqrt{3}(1+j\sqrt{3})(3+j\sqrt{3})}{1}\right| = \sqrt{3(4)(12)} = 12$$

3.3. Да се докаже правилото за гранките од геометриското место на корени кои лежат на реалната оска од комплексната рамнина.

Решение: За која и да било точка на реалната оска, аголот што го зафаќа правата повлечена од кој и да било реален пол или нула на отворениот систем до таа точка изнесува или 0^0 или 180^0, зависно од тоа дали точката се наоѓа лево или десно од конкретниот пол односно нула. Што се однесува до комплексните полови или нули, овој агол е секогаш нулев, бидејќи тие се јавуваат во коњугирано-комплексни парови:

$$\arg(s + \sigma_1 + j\omega_1) + \arg(s + \sigma_1 - j\omega_1) = 0$$

Следствено, за сите реални броеви $s(s = \sigma)$ важи:

$$\arg[G_0(\sigma)] = 180 n_r + \arg K$$

кадешто n_r е вкупниот број конечни нули и полови на отворениот систем $G_0(s)$ кои се наоѓаат десно од точката σ. За да биде исполнет критериумот на аргументот, n_r мора да биде непарен за $K > 0$ и парен за $K < 0$. Оттука, точките σ на реалната оска, кои се наоѓаат лево од непарен број конечни нули и полови на отворениот систем за $K > 0$ и точките σ на реалната оска, кои се наоѓаат лево од парен број конечни нули и полови на отворениот систем за $K < 0$, припаѓаат на геометриското место на корени на соодветнот затворен систем.

3.4. Да се докаќе дека аглите на асимптотите од гранките на едно геометриско место на корени се навистина определени со (4.28):

$$\beta = \begin{cases} \dfrac{(2l+1)\pi}{n-m}, & K > 0 \\ \dfrac{2l\pi}{n-m}, & K < 0 \end{cases} \quad ; \quad l = 0,1,2,\ldots,n-m-1$$

Решение: За точки s кои се наоѓаат многу далеку од координатниот почеток на s-рамнината важи:

$$\arg(s+z_i)_{|s|>>|z_i|} \cong \arg s$$

$$\arg(s+p_i)_{|s|>>|p_i|} \cong -\arg s$$

каде што $z_1, z_2, \ldots, z_m$ се нулите, а $p_1, p_2, \ldots, p_n$ се половите на отворениот систем. Оттука:

$$\arg\left[\frac{N(s)}{D(s)}\right] \cong -(n-m)\arg(s) = -(n-m)\beta$$

За да биде пол на набљудуваниот затворен систем, односно да се наоѓа на неговото геометриско место на корени, точката s мора да го задоволува критериумот на аргументот, според кој:

$$-(n-m)\beta = \begin{cases} (2l+1)\pi, & K > 0 \\ 2l\pi, & K < 0 \end{cases} \quad ; \quad l = 0,1,2,\ldots,n-m-1$$

па оттука се добива условот за β.

3.5. Да се покаже дека точката на раздвојување односно спојување σ_b на гранките од едно геометриско место на корени ја задоволува релацијата:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sigma_b + p_i}\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{\sigma_b + z_i}\right)$$

Решение: Точката на раздвојување односно спојување σ_b на гранките од едно геометриско место на корени е точка на реалната оска од s-комплексната рамнина за која коефициентот на засилување K има максимална вредност за половите кои се оддалечуваат од реалната оска, односно минимална вредност за половите кои се приближуваат кон реалната оска. Коефициентот на засилување K за точките од геометриското место на корени има вредност:

$$|K| = \left|\frac{D}{N}\right|$$

На реалната оска $s=\sigma$, знакот за модул во горниот израз може да се испушти и да се запише:

$$K=\frac{D(\sigma)}{N(\sigma)}$$

Максимумот односно минимумот на K во однос на σ се одредува од условот за екстрем:

$$\frac{dK}{d\sigma}=\frac{d}{d\sigma}\left[\frac{D(\sigma)}{N(\sigma)}\right]=\frac{d}{d\sigma}\left[\frac{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}\right]=0$$

од каде следува:

$$\frac{dK}{d\sigma}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(\sigma+p_i)}\left[\frac{D(\sigma)}{N(\sigma)}\right]-\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{(\sigma+z_i)}\left[\frac{D(\sigma)}{N(\sigma)}\right]=0\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(\sigma+p_i)}-\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{(\sigma+z_i)}=0\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(\sigma+p_i)}=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{(\sigma+z_i)}$$

3.6. Да се определи врската помеѓу аголот на оддалечување на геометриското место на корени од комплексен пол за $K>0$ и аголот на приближување кон комплексен пол за $K<0$.

Решение: Бидејќи $\arg G_0'$ се менува за 180^0 кога K се менува од позитивен во негативен број, аголот θ_D за $K<0$ се разликува за 180^0 од аголот θ_D за $K>0$.

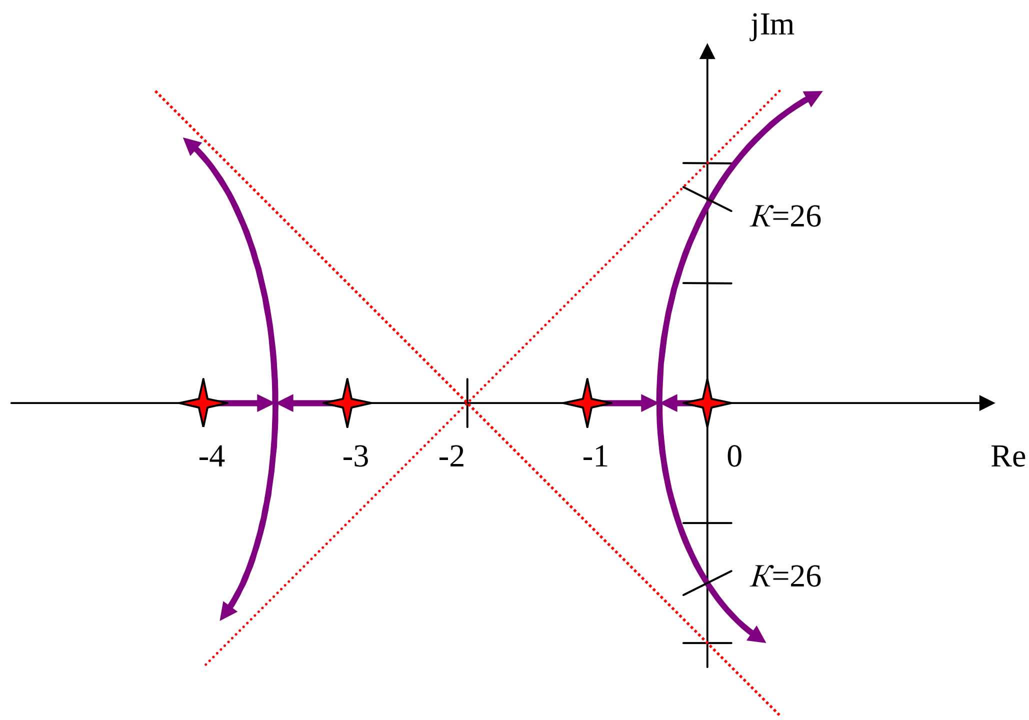
3.7. Да се нацрта геометриското место на корени на затворениот линеарен континуален динамички систем, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G_{ob}(s)=\frac{K}{s(s+1)(s+3)(s+4)}$$

за $K>0$ и $K<0$.

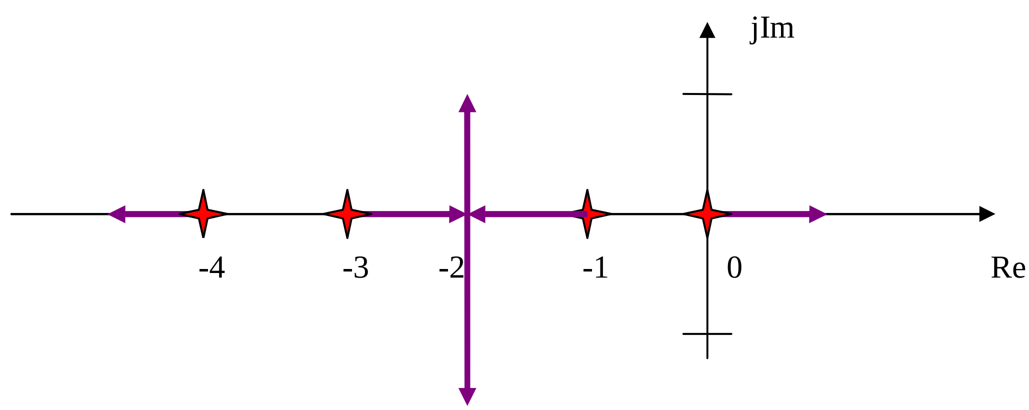
Решение: Во конкретниот случај, центарот на асимптотите е $\sigma_c=-2$, а бројот гранки на бараното геометриско место на корени е $n-m=4$. За $K>0$ делот од реалната оска помеѓу 0 и -1 и помеѓу -3 и -4 припаѓа на бараното геометриско место на корени, а асимптотите ги зафаќаат следните агли со реалната оска: $\beta_1=45^0$,

$\beta_2 = 135^0$, $\beta_3 = 225^0$ и $\beta_4 = 315^0$. Точките на раздвојување на гранките од геометриското место на корени се наоѓаат во $\sigma_{b1} = -0.424$ и $\sigma_{b2} = -3.576$.



Сл.3.1. Геометриско место на корени на затворениот систем од задачата 3.7 за $K > 0$

За $K < 0$, делот од реалната оска помеѓу 0 и ∞, помеѓу -1 и -3 и помеѓу -4 и $-\infty$ припаѓа на бараното геометриско место на корени, а асимптотите ги зафаќаат следните агли со реалната оска: $\beta_1 = 0^0$, $\beta_2 = 90^0$, $\beta_3 = 180^0$ и $\beta_4 = 270^0$. Постои само една точка на раздвојување на гранките од геометриското место на корени и таа се наоѓа во $\sigma_b = -2$.



Сл.3.2. Геометриско место на корени на затворениот систем од задачата 3.7 за $K < 0$