# ИСПИТ ПО СИНТЕЗА НА ПРОЦЕСНИ И РОБОТСКИ СИСТЕМИ 22.06.2007

## АНАЛИТИЧКА СИНТЕЗА НА ЛИНЕАРНИ СИСТЕМИ НА АВТОМАТСКО УПРАВУВАЊЕ СО ПОМОШ НА ИНТЕГРАЛНИТЕ КРИТЕРИУМИ НА ГРЕШКА

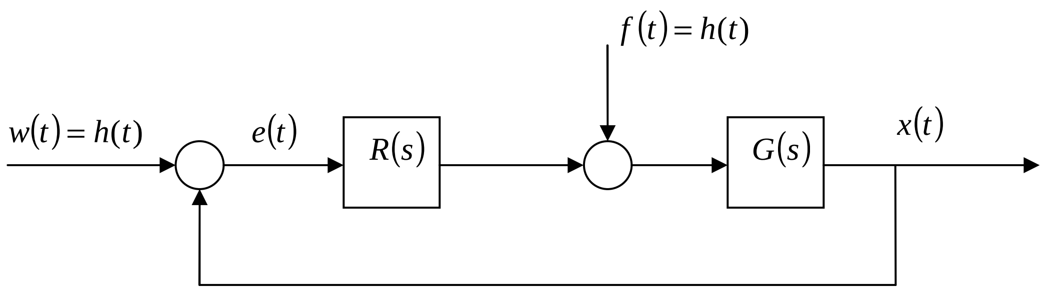
**1. (25 поени)** Со помош на интегралниот критериум:

$$J = \int_0^\infty [e(t) + e'(t)]^2 \, dt$$

да се определи вредноста на параметарот $K$ на затворениот линеарен стационарен континуален систем на автоматско управување од сл.1, ако:

$$R(s) = \frac{K}{s(s+1)}, \; G(s) = \frac{1}{s+2}.$$

(Упатство: $J = \dfrac{a_0 a_1 b_2^2 + a_0 a_3 \left(b_1^2 - 2b_0 b_2\right) + a_2 a_3 b_0^2}{2a_0 a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3)}$ )




Сл.1. Илустрација кон задачата 1

**Решение:** Станува збор за комбинирана синтеза (во присуство и на референтен влез $w(t)$ и на пречки $f(t)$ за кои се усвојува дека се стандардни отскочни сигнали), па $L$-сликата $E(s)$ на грешката $e(t)$ на овој систем ќе има две компоненти:

$$E(s) = L\{e(t)\} = \frac{1}{1 + R(s)G(s)} W(s) - \frac{G(s)}{1 + R(s)G(s)} F(s) =$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{K}{s(s+1)} \cdot \frac{1}{s+2}} \cdot \frac{1}{s} - \frac{\frac{1}{s+2}}{1 + \frac{K}{s(s+1)} \cdot \frac{1}{s+2}} \cdot \frac{1}{s} =$$

$$= \frac{s^2 + 3s + 2}{s^3 + 3s^2 + 2s + K} - \frac{s+1}{s^3 + 3s^2 + 2s + K} = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^3 + 3s^2 + 2s + K}$$

**(5 поени)**

а нејзината почетна вредност ќе биде:

$$e(0)=\lim_{s\to\infty} sE(s)=\lim_{s\to\infty} s\frac{s^2+2s+1}{s^3+3s^2+2s+K}=1$$ **(1 поен)**

Вредноста на интегралниот критериум $J=\int_0^\infty [e(t)+e'(t)]^2 dt=\int_0^\infty u^2(t)dt$ се пресметува со помош на формулата $J=\frac{a_0a_1b_2^2+a_0a_3\left(b_1^2-2b_0b_2\right)+a_2a_3b_0^2}{2a_0a_3(a_1a_2-a_0a_3)}$, каде што $a_i, b_i (i=0,1,2,3)$ се коефициентите на $L$-сликата $U(s)=L\{u(t)\}$: **(4 поени)**

$$U(s)=L\{u(t)\}=L\{e(t)+e'(t)\}=E(s)+[sE(s)-e(0)]=(s+1)E(s)-e(0)=\frac{s+1-K}{s^3+3s^2+2s+K}$$

и таа изнесува: **(5 поени)**

$$J=\frac{a_0a_1b_2^2+a_0a_3\left(b_1^2-2b_0b_2\right)+a_2a_3b_0^2}{2a_0a_3(a_1a_2-a_0a_3)}=\frac{K\cdot1\cdot1^2+3\cdot1\cdot(1-K)^2}{2\cdot K\cdot1(2\cdot3-1\cdot K)}=\frac{K+3(1-K)^2}{2K(6-K)}=J(K)$$

Нејзиниот минимум е одреден со условот:

$$\frac{dJ}{dK}=\frac{d}{dK}\left[\frac{K+3(1-K)^2}{2K(6-K)}\right]=0\Rightarrow(6K-5)(6-K)K-(6-2K)\left[K+3(1-K)^2\right]=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13K^2+6K-18=0\Rightarrow K_{1,2}=\frac{-3\pm3\sqrt{27}}{13}\Rightarrow K_1=-1.43, K_2=0.97$$ **(5 поени)**

и тој дава две можни вредности за непознатиот параметар на проектираниот затворен систем на автоматско управување. Меѓутоа, од овие две вредности, само вредноста $K_2=0.97$ припаѓа на параметарската област на стабилност на набљудуваниот систем $K\in(0,6)$. Следствено, таа е бараното решение за $K$. **(5 поени)**

## СИНТЕЗА НА ЛИНЕАРНИ СИСТЕМИ НА АВТОМАТСКО УПРАВУВАЊЕ СО ПОМОШ НА МЕТОДАТА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ

**2. (25 поени)** Преносната функција на соодветниот отворен систем за даден затворен линеарен стационарен континуален динамички систем со единична негативна повратна врска е дадена со изразот:

$$G_0(s)=\frac{K}{s(s+7)}$$

Отскочниот одзив на затворениот систем се одликува со максимален прескок од 20%.

а) Да се определи времето на смирување на отскочниот одзив на затворениот систем $T_s$ (Упатство: доминантен пар полови на затворениот систем се $s_{1,2} = -3.5 \pm j6.8$ за $K = 58.9$)

б) Да се определи стационарната грешка на одзивот на затворениот систем на единичен линеарно растечки влез

в) Да се проектира интегро-диференцијален компензатор со помош на кој времето на смирување на отскочниот одзив на компензираниот систем ќе се намали за 2 пати во однос на времето на смирување на некомпензираниот систем, а стационарната грешка за единичен линеарно растечки влез ќе се намали за 10 пати.

г) Да се оцени точноста на направената апроксимација со систем од втор ред.

Упатство:

- Сите пресметки да се заокружуваат на едно децимално место и за секој чекор каде што е веќе даден одговот да се објасни како е добиен
- Нулата на диференцирачката компонента да се смести во -3
- Коефициентот на засилување на соодветниот отворен систем за компензираниот затворен систем само со диференцирачка компонента е $\tilde{K} = 204.9$
- Коефициентот на засилување на соодветниот отворен систем за компензираниот затворен систем со интегро-диференцијален компензатор е $\tilde{K} = 205.4$ (Треба да се објасни и покаже како се пресметува $\tilde{K}$)
- Збирот на аглите што ги зафаќаат правите повлечени од нулите и половите на отворениот систем и нулата на диференцирачката компонента на компензаторот во -3 до доминантниот пол на компензираниот систем изнесува $-100.8^0$
- Затворениот компензиран систем има дополнителни полови во -0.928 и -2.6

**Одговор:** а) Со пребарување долж линијата на константен максимален прескок од 20%, се утврдува дека доминантниот пар полови на затворениот систем се наоѓа во точките $s_{1,2} = -3.5 \pm j6.83$ за $K = 58.9$. Оттука, времето на смирување на отскочниот одзив на некомпензираниот систем е:

$$T_s = \frac{-4}{-3.5} = 1.143 \sec$$ **(2 поени)**

б) Брзинската константа на некомпензираниот систем е:

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG_0(s) = \lim_{s \to 0} s\frac{K}{s(s+7)} = \lim_{s \to 0} \frac{K}{s+7} = \frac{58.9}{7} = 8.41$$ **(2 поени)**

па стационарната грешка на одзивот на овој систем за единичен линеарно растечки влез изнесува:

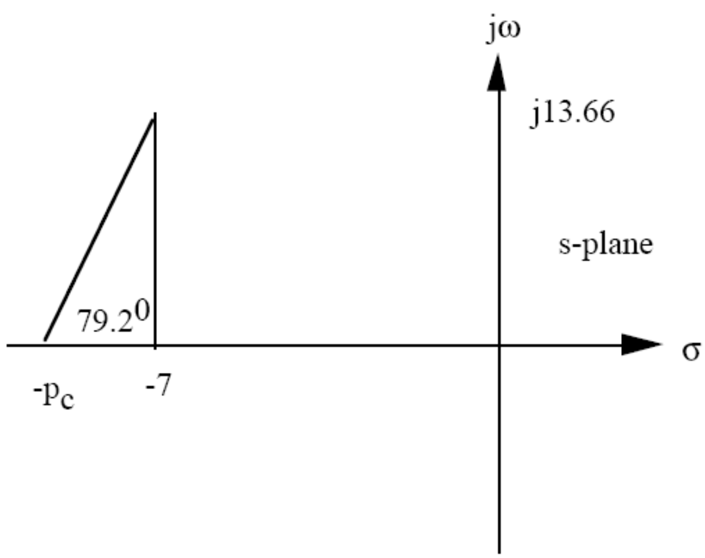
$$e(\infty) = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{8.41} = 0.1189 \approx 0.12$$ **(2 поени)**

в) За времето на смирување на отскочниот одзив на компензираниот систем да биде двапати покусо од времето на смирување на некомпензираниот систем, доминантниот пар полови на компензираниот систем треба да биде $s_{1,2} = 2(-3.5 \pm j6.83) = -7.0 \pm j13.66$. **(2 поени)**

Збирот на аглите што ги зафаќаат правите повлечени од нулите и половите на отворениот систем и нулата на диференцирачката компонента на компензаторот во -3 до доминантниот пол во $-7.0 + j13.66$ изнесува $-100.8^0$, па правата повлечена од полот на диференцирачката компонента на компензаторот до доминантниот пол на компензираниот систем во $-7.0 + j13.66$ со реалната оска мора да зафаќа агол од $180^0 - 100.8^0 = 79.2^0$. **(2 поени)**

Врз основа на сл.2, за полот на диференцирачката компонента на компензаторот се добива:

$$\frac{13.66}{-p_c + 7} = tg79.2^0 \Rightarrow p_c = -9.61$$ **(3 поени)**




Сл.2. Одредување на положбата на полот од диференцирачката компонента на компензаторот за системот од задача 2

Коефициентот на засилување $\tilde{K}$ на компензираниот систем изнесува $\tilde{K} = 204.9$, а брзинската константа на компензираниот систем со диференцирачка компонента $G_{cd}(s) = \frac{s+3}{s+9.6}$ е:

$$\tilde{K}_v = \lim_{s\to 0} sG_0(s)G_{cd}(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{\tilde{K}}{s(s+7)}\cdot\frac{s+3}{s+9.6} = \frac{(204.9)\cdot(3)}{(7)\cdot(9.6)} = 9.138 \approx 9.1$$ **(2 поени)**

Брзинската константа на некомпензираниот систем е $K_v = 8.41$, додека брзинската константа на компензираниот систем само со диференцирачката компонента на компензаторот е $\tilde{K}_v = 9.138 \approx 9.1$. За стационарната грешка на одзивот на компензираниот систем на единичен линеарно растечки влез да биде 10 пати помала во однос на одзивот на некомпензираниот систем на истиот влез, брзинската константа на компензираниот систем треба да биде 10 пати поголема од брзинската константа на некомпензираниот систем. Следствено, интегрирачката компонента на компензаторот треба да обезбеди корекција на брзинската константа $\tilde{K}_v = 9.138 \approx 9.1$ за фактор:

$$\frac{(8.41)\cdot(10)}{9.138} = 9.2$$ **(2 поени)**

Тоа значи дека нулата на интегрирачката компонента од компензаторот треба да биде 9.2 пати подалеку од имагинарната оска во однос на нејзиниот пол, па за интегрирачката компонента на компензаторот може да се одбере:

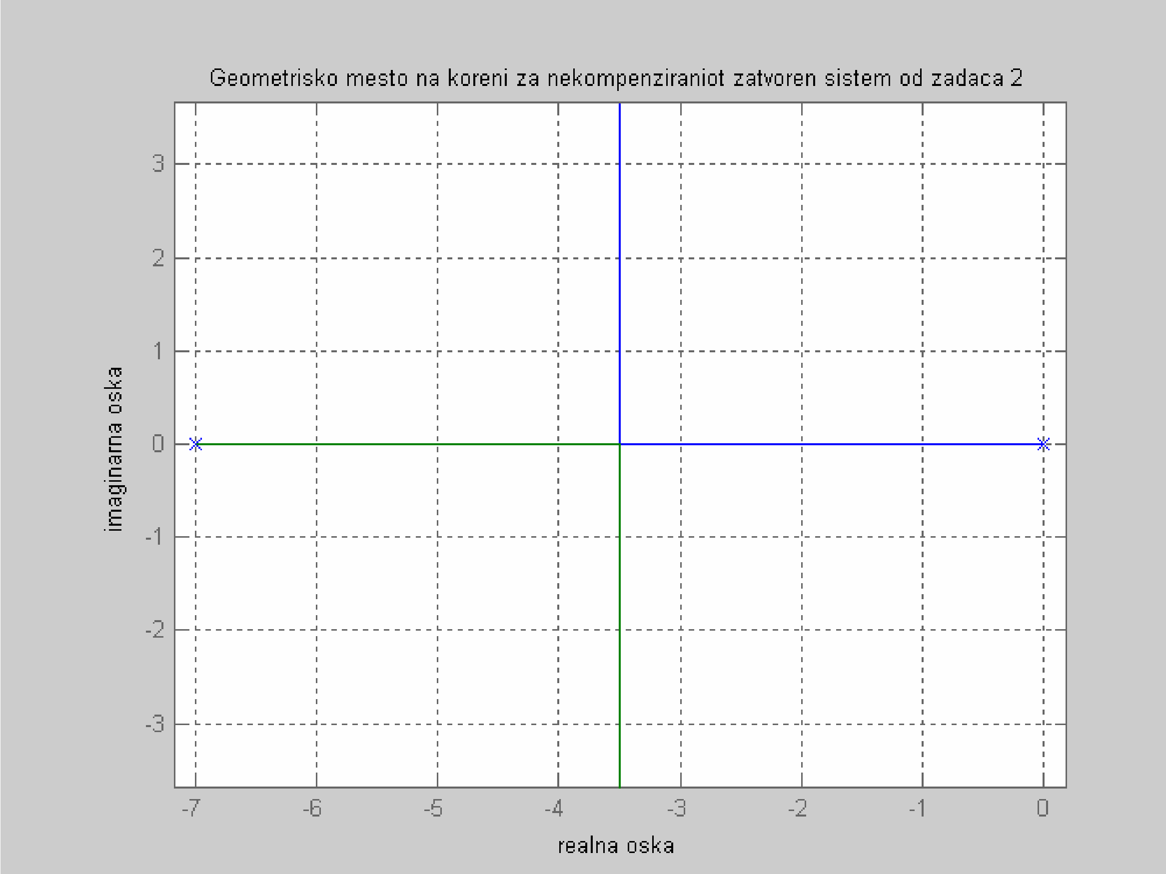
$$G_{ci}(s) = \frac{s+0.092}{s+0.01}$$ **(2 поени)**

Коефициентот на засилување на компензираниот систем со интегро-диференцијален компензатор се одредува врз основа на принципот на модулот (критериум на модул) и тој изнесува $\tilde{K} = 205.4$, па преносната функција на соодветниот отворен систем за компензираниот затворен систем е од облик:

$$\tilde{G}_0(s) = \frac{205.4(s+3)(s+0.092)}{s(s+7)(s+9.61)(s+0.01)}$$ **(2 поени)**

г) Затворениот компензиран систем има дополнителни полови во -0.928 и -2.6

**(2 поени)**




## СИНТЕЗА НА ЛИНЕАРНИ СИСТЕМИ НА АВТОМАТСКО УПРАВУВАЊЕ ВО ПРОСТОРОТ НА СОСТОЈБИ

**3. (25 поени)** Даден е линеарниот стационарен континуален динамички објект со еден влез $u(t)$ и еден излез $x(t)$, опишан со преносната функција:

$$G_0(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 5s + 3}$$

Со воведување повратна врска по состојбите на овој објект од облик:

$$u(t) = y(t) - \underline{K}\underline{v}(t)$$

каде што $y(t)$ е нов референтен влез, да се проектира затворен систем на автоматско управување кој ќе има максимален прескок од 9.5% ($\zeta = 0.6$) и време на смирување $T_s = \frac{1}{3}\sec$. Потоа да се определи стационарната грешка на одзивот на проектираниот систем на автоматско управување за единичен отскочен влез. На крај да се проектира набљудувач на состојби за дадениот објект, кој ќе има 8 пати побрз одзив од проектираниот затворен систем на автоматско управување.

**Решение:** Потребниот модел на зададениот објект во просторот на состојби се формира со помош на смените:

$v_1(t) = x(t)$

$v_2(t) = x'(t)$

и тој гласи:

$$\underline{v}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} \underline{v}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$x(t) = [1 \quad 0] \underline{v}(t)$ **(3 поени)**

Врз основа на зададените услови за максималниот прескок и дозволеното време на смирување на одзивот, за половите на проектираниот затворен систем на автоматско управување се добива:

$$-\sigma_d = -\frac{4}{T_s} = -\frac{4}{\frac{1}{3}} = -12$$

$$\sigma_d = \zeta\omega_n \Rightarrow \omega_n = \frac{\sigma_d}{\zeta} = \frac{12}{0.6} = 20\,\text{sec}^{-1}$$

$$\omega = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 20\sqrt{1-0.36} = 20\sqrt{0.64} = \pm 20(0.8) = \pm 16$$

$s_{1,2} = -12 \pm j16$ **(2 поени)**

па карактеристичниот полином на проектираниот затворен систем на автоматско управување треба да биде од облик:

$\tilde{a}(s) = s^2 + 24s + 400$ **(2 поени)**

Од друга страна, коефициентите на полиномот $\tilde{a}(s)$ се функции од елементите на матрицата редица $\underline{K}$:

$\tilde{a}(s) = s^2 + (5 + k_2)s + (3 + k_1)$ **(2 поени)**

па со изедначување на последните два изрази се добива:

$3 + k_1 = 400 \Rightarrow k_1 = 397$

$5 + k_2 = 24 \Rightarrow k_2 = 19$ **(2 поени)**

Оттука, еден модел на проектираниот затворен систем на автоматско управување во просторот на состојби ќе биде од облик:

$$\underline{v}'(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -24 & -400\end{bmatrix}\underline{v}(t)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}y(t)$$

$$x(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\underline{v}(t)$$ **(1 поен)**

а неговата преносна функција $G(s)=\dfrac{X(s)}{Y(s)}$:

$$G(s)=\frac{X(s)}{Y(s)}=\frac{1}{s^2+24s+400}$$ **(1 поен)**

Стационарната вредност на одзивот $x(t)$ на проектираниот затворен систем на автоматско управување за единичен отскочен влез е:

$$x(\infty)=\lim_{t\to\infty}x(t)=\lim_{s\to 0}sX(s)=\lim_{s\to 0}sG(s)Y(s)=\lim_{s\to 0}G(s)=\frac{1}{400}$$ **(1 поен)**

па бараната стационарна грешка ќе биде:

$$e(\infty)=1-x(\infty)=1-\frac{1}{400}=0.9975$$ **(1 поен)**

За да се проектира набљудувач на состојби за објектот $G_0(s)=\dfrac{X(s)}{U(s)}=\dfrac{1}{s^2+5s+3}$, неговиот модел во просторот на состојби се составува врз основа на релацијата:

$$X(s)=\frac{1}{s}\left\{-5X(s)+\frac{1}{s}\left[U(s)-3X(s)\right]\right\}$$

од каде за состојбените големини на објектот се усвојуваат смените:

$$V_1(s)=X(s)$$

$$V_2(s)=\frac{1}{s}\left[U(s)-3X(s)\right]$$

Следствено, бараниот модел на објектот во просторот на состојби ќе гласи:

$$\underline{v}'(t)=\begin{bmatrix}-5 & 1\\ -3 & 0\end{bmatrix}\underline{v}(t)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}y(t)$$

$$x(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\underline{v}(t)$$ **(5 поени)**

па карактеристичната равенка на проектираниот набљудувач на состојби ќе биде од облик:

$$s^2+(5+l_2)s+(3+l_1)=0 \qquad \textbf{(2 поени)}$$

Бидејќи половите на проектираниот затворен систем на автоматско управување се $s_{1,2}=-12\pm j16$, половите на проектираниот набљудувач на состојби треба да се одберат да бидат $8(-12\pm j16)=-96\pm j128$. Тогаш карактеристичната равенка на набљудувачот ќе гласи:

$$s^2+192s+25600=0 \qquad \textbf{(2 поени)}$$

и неговиот одзив ќе биде 8 пати побрз од одзивот на управувачката контура, а елементите на векторот $\underline{L}$ со помош на кои се постига поставеното проектно барање се:

$$\underline{L}=\begin{bmatrix}25597\\187\end{bmatrix} \qquad \textbf{(1 поен)}$$

**ФРЕКВЕНТНА СИНТЕЗА НА ЛИНЕАРНИ СИСТЕМИ НА АВТОМАТСКО УПРАВУВАЊЕ СО ПОМОШ НА БОДЕОВИТЕ ДИЈАГРАМИ**

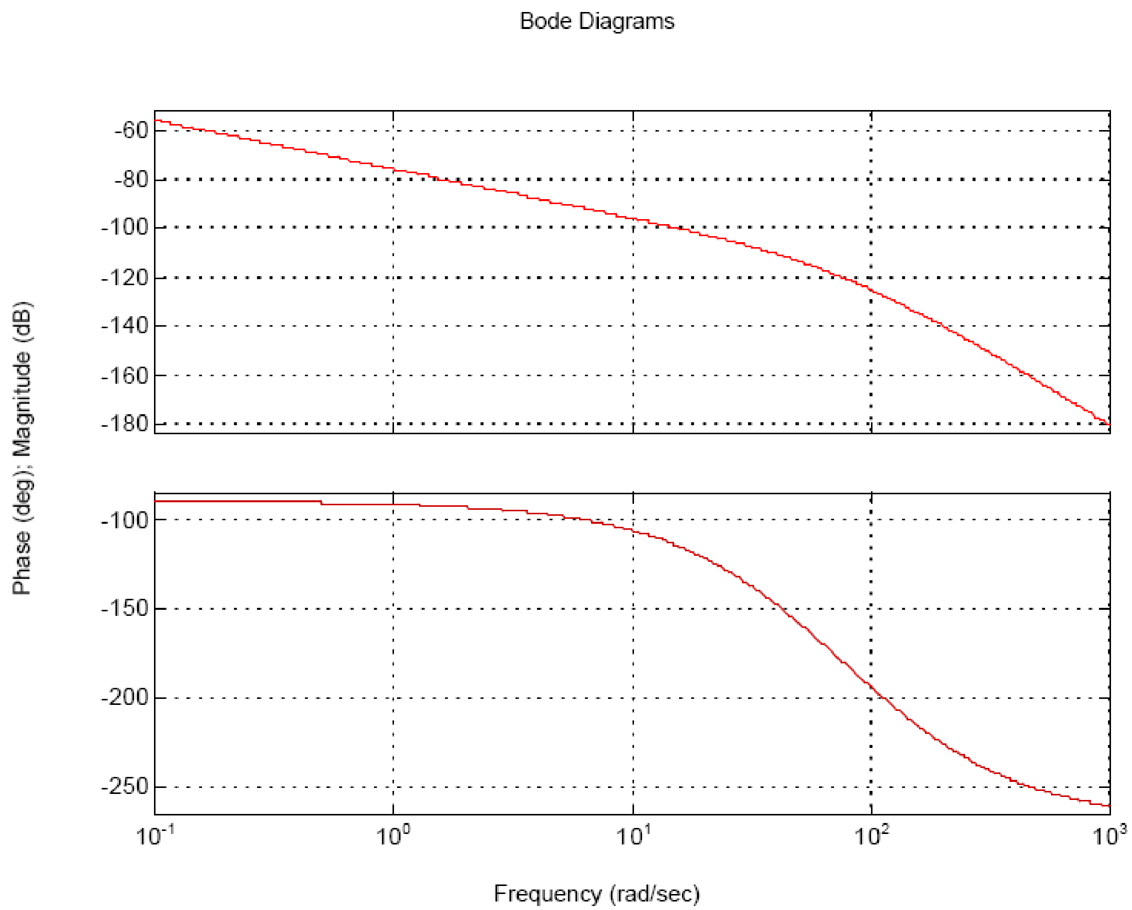
**4. (25 поени)** Соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен линеарен стационарен континуален динамички систем со единична негативна повратна врска е опишан со преносната функција:

$$G_0(s)=\frac{K}{s(s+50)(s+120)}$$

Отскочниот одзив на затворениот систем, под претпоставка, има максимален прескок од 20%. Да се изврши компензација на овој систем, така што компензираниот систем ќе има десет пати помала стационарна грешка од некомпензираниот систем, а приближно ист преоден режим.

Упатство: $\zeta=0.456$

**Одговор:** Бодеовите дијаграми на слабеење и фаза на соодветниот отворен систем за $K=1$ се прикажани на сл.3.




Сл.3. Бодеови дијаграми на слабеење и фаза на отворениот систем од задача 4 за $K=1$

На максимален прескок од 20% одговара фактор на релативно пригушување:

$$\zeta = \frac{-\ln\left(\frac{M\%}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(\frac{M\%}{100}\right)}} = 0.456$$

Ваков фактор на релативно пригушување имплицира резерва на фаза од $48.1^0$:

$$\varphi_{rf} = arctg\frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2+\sqrt{1+4\zeta^4}}}$$

Пресечната фреквенција на засилување се определува со помош на аголот $\varphi(\omega_1) = -180^0 + 48.1^0 = -131.9^0$ и таа изнесува $\omega_1 = 27.6\sec^{-1}$. Бидејќи, модулот на фреквентната преносна функција на отворениот систем за оваа фреквенција треба да биде днаков на единица, $|G_0(j27.6)| = 5.15\cdot(10)^{-6}\tilde{K}$, за $\tilde{K}$ се добива:

$$\tilde{K}=\frac{1}{5.15\cdot(10)^{-6}}=194,200$$

За да се исполни барањето за стационарната грешка, коефициентот на засилување $K$ треба да изнесува $\tilde{K}=1,942,000$.

Бодеови дијаграми на слабеење и фаза на отворениот систем за $\tilde{K}=1,942,000$ се прикажани на сл.4.

Меѓутоа, вредноста $48.1^0$ треба да се зголеми приближно за $10^0$, за да се компензира влијанието на интегрирачкиот компензатор, па за резервата на фаза се усвојува вредност $\varphi_{rf}=58.1^0$. Тогаш пресечната фреквенција на засилување се определува со помош на аголот $\varphi(\omega_1)=-180^0+58.1^0=-121.9^0$ и таа изнесува $\omega_1=20.4\sec^{-1}$. Дијаграмот на слабеење на отворениот систем, на оваа фреквенција мора да ја сече реалната оска, а од сл.4 се гледа дека тековно изнесува $23.2dB$. Затоа интегрирачкиот компензатор се одбира така што асимптотата на неговиот дијаграм на слабеење за високи фреквенции да изнесува $-23.2dB$, додека фреквенцијата на прекршување на овој дијаграм е во точката $\omega_p=0.1(20.4)=2.04rad^{-1}$. Низ оваа точка се повлекува права под наклон од $-20dB/dec$ се до нејзиниот пресек со хоризонталната оска, кој настанува при фреквенција $\omega_{p1}=0.141rad^{-1}$.

Оттаму, компензаторот се одбира да има преносна функција:

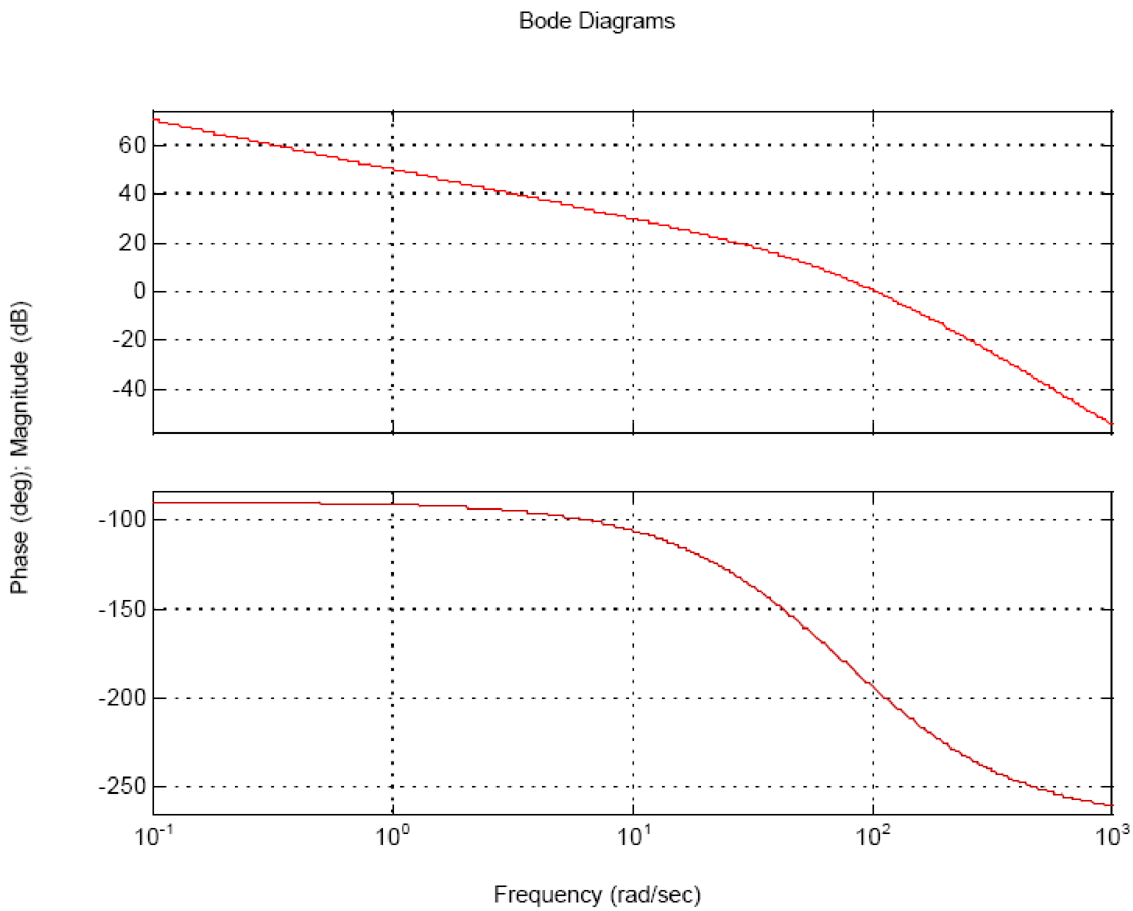
$$G_c(s)=K_c\frac{s+2.04}{s+0.141}$$

при што $K_c$ треба да обезбеди $0dB$ на ниски фреквенции:

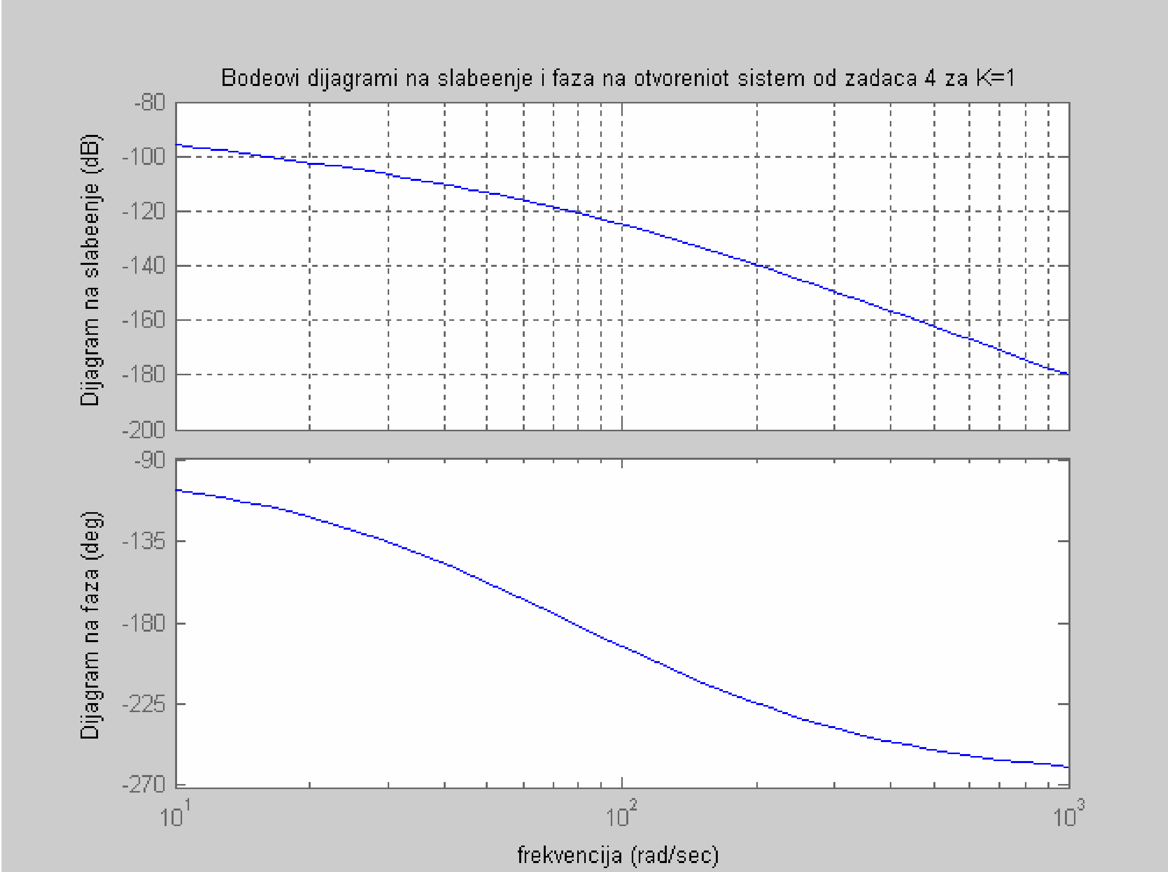
$$K_c=\frac{0.141}{2.04}=0.0691$$

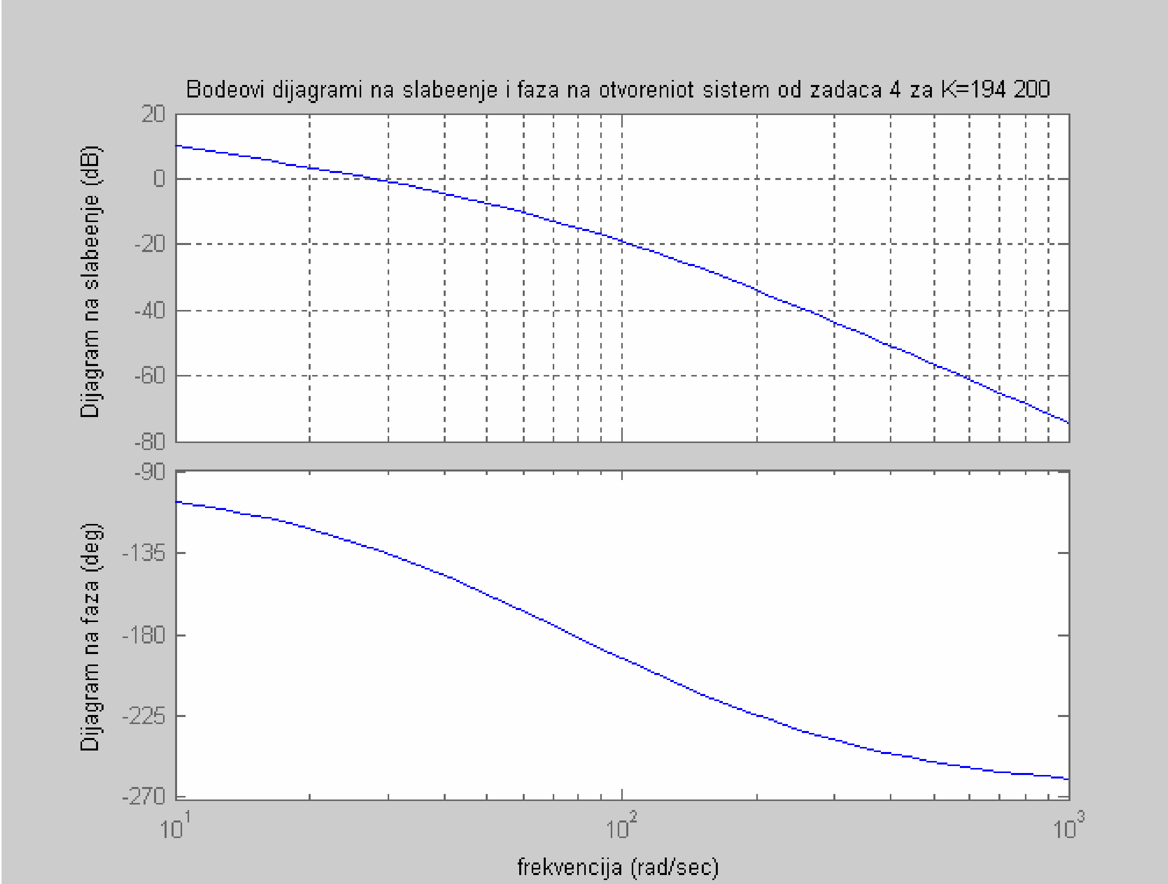
Следствено:

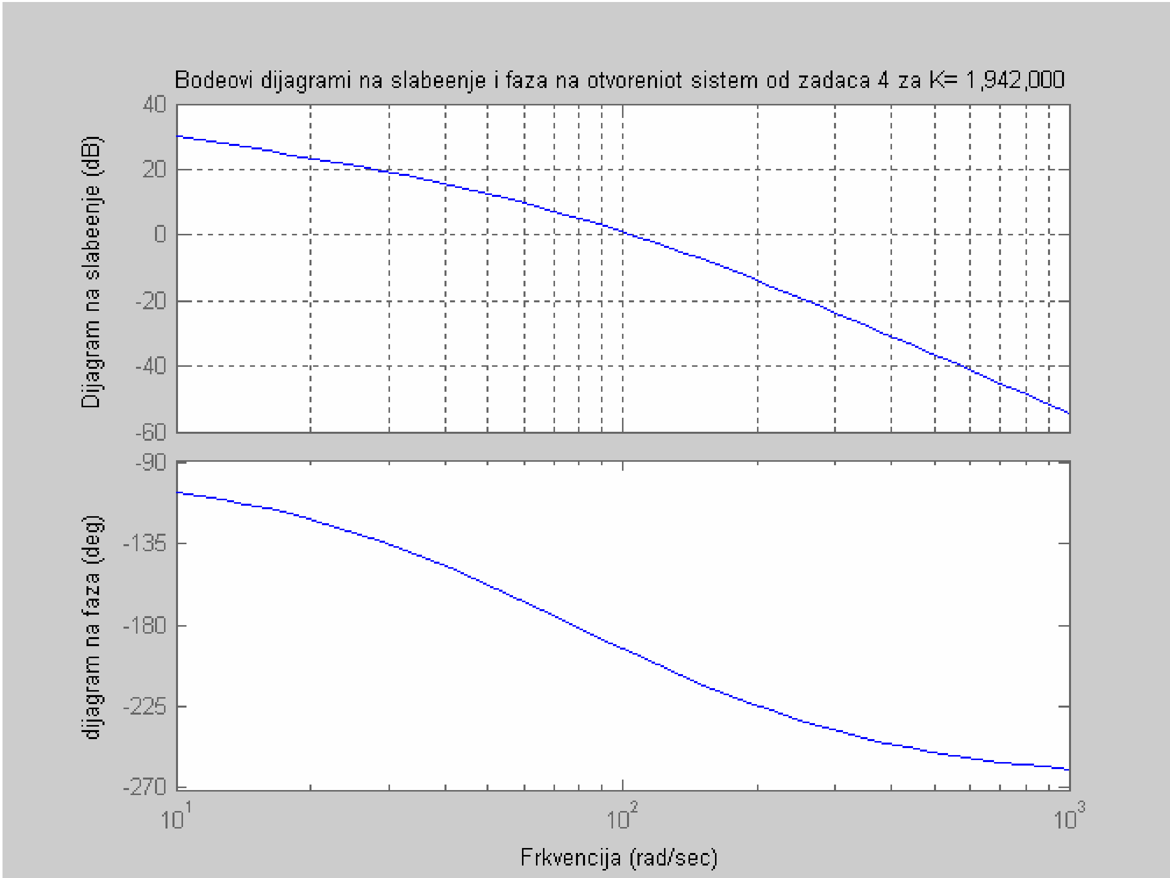
$$G_c(s)=0.0691\frac{s+2.04}{s+0.141},\ G_0(s)=\frac{1,942,000}{s(s+50)(s+120)}$$




Сл.4. Бодеови дијаграми на слабеење и фаза на отворениот систем од задачата 4 за $\tilde{K} = 1{,}942{,}000$


Bodeovi dijagrami na slabeenje i faza na otvoreniot sistem od zadaca 4 za K=1
Dijagram na slabeenje (dB)
-80
-100
-120
-140
-160
-180
-200
Dijagram na faza (deg)
-90
-135
-180
-225
-270
$10^1$
$10^2$
$10^3$
frekvencija (rad/sec)


Bodeovi dijagrami na slabeenje i faza na otvoreniot sistem od zadaca 4 za K=194 200
Dijagram na slabeenje (dB)
20
0
-20
-40
-60
-80
Dijagram na faza (deg)
-90
-135
-180
-225
-270
$10^1$
$10^2$
$10^3$
frekvencija (rad/sec)




A 20% overshoot requires $\zeta = \dfrac{-\log\left(\dfrac{\%}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \log^2\left(\dfrac{\%}{100}\right)}} = 0.456$. This damping ratio implies a phase margin of $48.1^0$. Adding $10^0$ to compensate for the phase angle contribution of the lag, we use $58.1^0$. Thus, we look for a phase angle of $-180^0 + 58.1^0 = -129.9^0$. The frequency at which this phase occurs is 20.4 rad/s. At this frequency the magnitude plot must go through zero dB. Presently, the magnitude plot is 23.2 dB. Therefore draw the high frequency asymptote of the lag compensator at –23.2 dB. Insert a break at 0.1(20.4) = 2.04 rad/s. At this frequency, draw –20 dB/dec slope until it intersects 0 dB. The frequency of intersection will be the low frequency break or 0.141 rad/s. Hence the